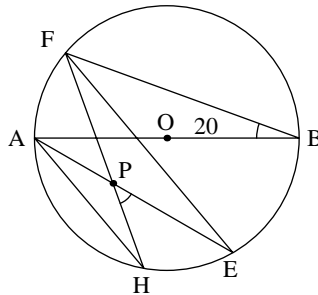


آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

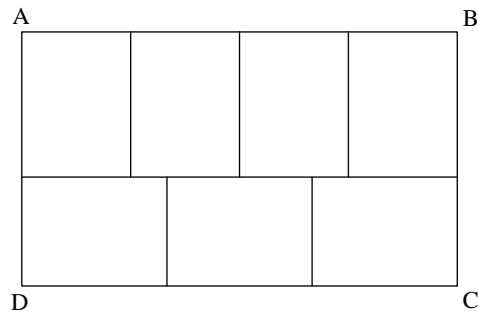
۱. در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\angle FBA = 20^\circ$ ، در این صورت زاویه‌ی HPE برابر است با:
- (الف) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 35° (ه) 40°



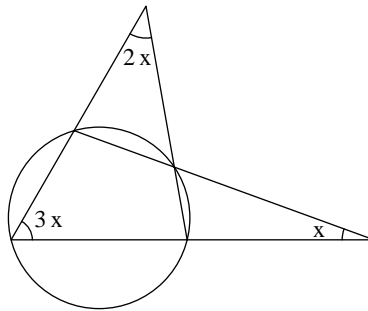
۲. باقیمانده‌ی تقسیم $5^{22} + 7$ بر ۸ برابر است با:
- (الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴
۳. اگر $r^2 - r - 1 = 0$ ، آنگاه در مورد $(r - 4)(r + 2)(r + 1)$ کدام یک از جملات زیر درست است؟
- (الف) عددی صحیح است. (ب) مثبت و گنگ است.
(ج) منفی و گنگ است. (د) گویا اما غیر صحیح است.
(ه) غیر حقیقی است.

۴. مستطیل $ABCD$ مانند شکل به هفت مستطیل مساوی کوچکتر تقسیم شده است. اگر مساحت $ABCD$ برابر ۳۳۶ سانتیمتر مربع باشد، در آن صورت محیط $ABCD$ بر حسب سانتیمتر برابر کدام یک از اعداد زیر است؟
- (الف) ۷۶ (ب) ۸۶ (ج) ۹۶ (د) ۱۰۶ (ه) ۱۱۶

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



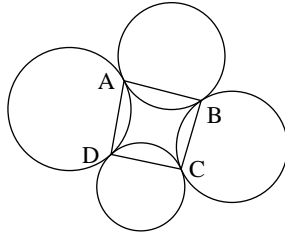
۵. در شکل زاویه‌ی x برابر است با:
- (الف) $x = 10^\circ$ (ب) $x = 15^\circ$ (ج) $x = 18^\circ$ (د) $x = 20^\circ$ (ه) $x = 25^\circ$



۶. در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمره‌ی مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره‌ی منفی دارد (به سؤالیهای بدون جواب هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. اگر نمره‌ی دانش‌آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش‌آموز به چند سؤال جواب نداده است؟
- (الف) ۲ (ب) ۵ (ج) ۷ (د) ۹ (ه) ۱۳
۷. در یک چهارضلعی محدب کدام یک از نقاط زیر دارای این خاصیت است که مجموع فواصل آن از چهار رأس چهارضلعی حداقل مقدار ممکن را دارد؟
- (الف) مرکز ثقل چهارضلعی (ب) یکی از رأسهای چهارضلعی
 (ج) نقطه‌ای بیرون چهارضلعی (د) محل برخورد قطرهای چهارضلعی
 (ه) محل برخورد پاره‌خطهایی که اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کنند.
۸. کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند).
- (الف) ۴۵ (ب) ۵۵ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۳۵ (ه) ۴۹۵
۹. به‌ازای کدام مقدار n ، معادله‌ی $n = x + y + xy$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب ندارد؟
- (الف) $n = 100$ (ب) $n = 105$ (ج) $n = 110$ (د) $n = 115$ (ه) $n = 120$

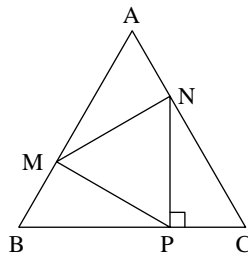
آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۰. چهار دایره‌ی C_1, C_2, C_3, C_4 و C_4 مطابق شکل در نقاط A, B, C, D بر هم مماس هستند. کدام یک از احکام زیر در مورد چهارضلعی $ABCD$ همواره درست است؟
 الف) $ABCD$ محیطی است. ب) $ABCD$ محاطی است.
 ج) $ABCD$ دوزنقه است. د) قطرهای $ABCD$ بر هم عمودند.
 ه) قطرهای $ABCD$ همدیگر را نصف می‌کنند.



۱۱. فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$ به‌ازای $k = 1, 2, 3, \dots$ عددی صحیح باشد. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟
 الف) $\frac{F(\frac{1}{n})}{G(\frac{1}{n})}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n ، عددی صحیح است.
 ب) F بر G بخش پذیر است.
 ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به‌ازای هر عدد صحیح k ، صحیح است.
 د) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(k)}{G(k)} = \infty$
 ه) درجه‌ی $G(x)$ صفر یا یک است.

۱۲. مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط شده است به طوری که $NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با:
 الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ د) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ه) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



۱۳. اگر چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ بر $ax^2 + tx + 1$ بخش پذیر باشد آنگاه، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) $a^2 - 2c \geq b$ ب) $a + c > 3$ ج) $a^2 - c \geq ab$
 د) $a^2 + c^2 = ab$ ه) $a^2 - c^2 = ab$

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نماینده‌ی عددی یک رقمی است:

$$\begin{array}{r} S \ U \ A \ V \ E \\ S \ A \ G \ E \\ + \ S \ A \ G \ E \\ \hline ۴ \ ۶ \ ۹ \ ۳ \ ۳ \end{array}$$

در این صورت U کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۱۵. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است. چند صفحه می‌توان یافت که از چهار رأس این چهاروجهی به یک فاصله باشد؟

الف) یک صفحه ب) چهار صفحه ج) هفت صفحه
د) حداکثر شش صفحه ه) $\binom{4}{1} + \binom{4}{1}$ صفحه

۱۶. اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه‌ی

$$c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$

برقرار باشد، زاویه‌ی C برابر است با:

الف) دقیقاً 30° ب) دقیقاً 60° ج) دقیقاً 120°
د) 60° یا 120° ه) 30° یا 120°

۱۷. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که مجموع

$$1! + 2! + \dots + n!$$

مربع کامل باشد؟

الف) تعداد نامتناهی n ب) فقط برای دو مقدار n
ج) فقط برای سه مقدار n د) فقط برای چهار مقدار n
ه) فقط برای پنج مقدار n

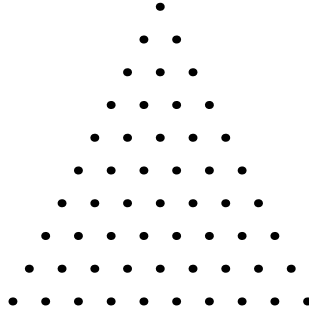
۱۸. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه [مانند M] را بیابید به طوری که دو چهارضلعی $AMCD$ و $ABCM$ دارای مساحت‌های یکسان باشند.

الف) یک پاره خط است. ب) کمائی از دایره است.
ج) خطی عمود بر BD است. د) خطی موازی AC است.
ه) خطی است که با یکی از اضلاع موازی است.

۱۹. در شکل، یک شبکه‌ی منظم مثلثی از نقاط شامل $\frac{10 \times 11}{2}$ نقطه را مشاهده می‌کنید به طوری که هر ضلع آن شامل ۱۰ نقطه است. حداقل تعداد خطوطی را بیابید که از تمام این نقاط می‌گذرند.

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. فرض کنید «ناحیه اول»، آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آنها مثبت‌اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور x در نظر می‌گیریم و آنها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور y وصل می‌کنیم. از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید در ناحیه‌ی اول هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرند. تعداد نقاط تقاطع این خطوط را در ناحیه‌ی اول بیابید.

- الف) ۷۹۸۰۰ (ب) ۴۰۰۰۰ (ج) ۳۶۱۰۰ (د) ۴۲۰۰۰ (ه) ۳۸۰۰۰

۲۱. فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, 16\}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. سه‌تایی $\{a, b, c\}$ را «اولیه» گوئیم هرگاه هر دو عضو نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه‌تایی اولیه نباشد آنگاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با:

- الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

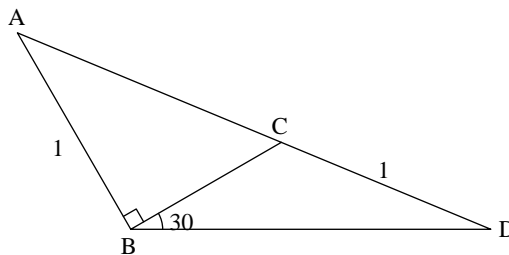
۲۲. اگر در مثلث ABC داشته باشیم

$$\angle B = 2\angle C \quad a = \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- آنگاه λ در کدام یک از فواصل زیر قرار می‌گیرد؟
- الف) $0 < \lambda \leq 1$ (ب) $\frac{1}{3} < \lambda \leq 1$ (ج) $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ (د) $1 \leq \lambda < 2$ (ه) $\frac{1}{3} \leq \lambda < \frac{2}{3}$

۲۳. در شکل فرض کنید $AB = CD = 1$. در این صورت طول AC برابر است با:

- الف) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\sqrt[3]{3}$ (ه) $\sqrt[3]{2}$



۲۴. اگر رابطه‌ی

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^n + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^n + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^n = 1$$

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

- برای $n = 1$ صحیح باشد، آنگاه
الف) برای تمام n ‌های زوج صحیح است.
ب) برای تمام n ‌های فرد صحیح است.
ج) برای $n = 3k$ صحیح است.
د) برای $n = 3k + 1$ صحیح است.
ه) برای $n = 3k + 2$ صحیح است.

۲۵. می‌دانیم بین اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰، چهار عدد طبیعی موجودند به طوری که هر یک با مجموع مکعبات رقم‌هایشان برابرند و سه‌تا از آنها عبارت‌اند از ۴۰۷، ۳۷۱ و ۱۵۳. عدد چهارم را دقیقاً به دست آورید و بگویید در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار دارد.

- الف) $[300, 400]$ ب) $[400, 500]$ ج) $[500, 600]$
د) $[600, 700]$ ه) $[700, 800]$