

آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهرا ن اخباریفر

۱. فرض کنید a, b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

ثابت کنید a, b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۲. فرض کنید a, b, c و d اعدادی طبیعی باشند به طوری که،

$$ab = cd$$

آیا $S = a + b + c + d$ می‌تواند عددی اول باشد؟

۳. مثلث ABC مفروض است. نقاطی مانند D و E خارج مثلث ABC در نظر می‌گیریم به طوری که مثلثهای ADB و AEC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشند ($\angle D = 90^\circ$ و $\angle E = 90^\circ$).

اگر F نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد ثابت کنید مثلث DFE نیز قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۴. روی یک خط راست n نقطه‌ی قرمز و n نقطه‌ی آبی نه لزوماً متمایز به طور دلخواه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای متفاوت از مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای یکسان کمتر نیست.