

(۱) ۲۱ عدد متمایز از بین اعضای مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 2046\}$ انتخاب شده‌اند. نشان دهید که می‌توان سه عدد متمایز a, b و c از بین آن ۲۱ عدد انتخاب کرد به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$bc < 2a^2 < 4ac$$

(۲) نقاط D, E و F به ترتیب روی اضلاع BC, AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و فقط اگر

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

(مرکز ثقل یک مثلث محل تلاقی سه میانه‌ی آن مثلث است.)

(۳) مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ را M می‌نامیم. نشان دهید که می‌توان ۱۶ زیرمجموعه از M انتخاب کرد به طوری که برای هر $a \in M$ ، ۸ تا از این مجموعه‌ها باشند که اشتراک آنها دقیقاً برابر $\{a\}$ باشد.

(۴) همه‌ی عددهای طبیعی n را بیابید که مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ را بتوان به سه مجموعه‌ی مجزای A, B و C تقسیم کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه با هم برابر باشد.

(۵) می‌دانیم در چهاروجهی $ABCD$ ، مجموع زاویه‌های هر رأس برابر 180° درجه است. (مثلاً در رأس A : $\angle DAB + \angle CAD + \angle BAC = 180^\circ$) نشان دهید که وجوه این چهاروجهی، چهار مثلث برابرند.

(۶) «آتر عدد» تعمیمی از مفهوم عدد است. همان‌طور که می‌دانید هر عدد طبیعی به صورت دنباله‌ی متناهی از ارقام صفر تا نه نوشته می‌شود. یک «ابر عدد» دنباله‌ای از سمت چپ نامتناهی از ارقام صفر تا نه است، مثلاً $43030303\dots$ یک ابر عدد است. توجه کنید که هر عدد خود یک ابر عدد است (که از جایی به بعد ارقام آن همگی صفرند). با همان روشی که دو عدد با هم جمع یا در هم ضرب می‌شوند، می‌توان دو «ابر عدد» را نیز با هم جمع و یا در هم ضرب کرد. مثال:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3030304 \\ + 4571378 \\ \hline 7601682 \\ 3030304 \\ \times 4571378 \\ \hline 4242432 \\ 212128 \\ 90912 \\ 0304 \\ 128 \\ 20 \\ 6 \\ \hline 5038912 \end{array}$$

الف) فرض کنید A یک ابرعدد است. ثابت کنید ابرعدد B وجود دارد که $A + B = \overleftarrow{0}$ (منظور از $\overleftarrow{0}$ «ابرعدد»ی است که همهی رقم‌های آن صفر است).

ب) تمام ابرعددهای A را پیدا کنید که وارون ضربی دارند، یعنی ابرعدد B وجود دارد که $A \times B = \overleftarrow{1}$ (منظور از $\overleftarrow{1}$ «ابرعدد»ی است).

ج) آیا درست است که اگر $A \times B = \overleftarrow{0}$ آن‌گاه $A = \overleftarrow{0}$ و یا $B = \overleftarrow{0}$ چرا؟