

به نام او

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز اول

۱. فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، به طوری که $np + 1$ یک مربع کامل است. ثابت کنید می‌توان $n + 1$ را به صورت مجموع p تا مربع کامل نوشت.

۲. مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مفروض است. روی اضلاع آن سه مثلث $B'AC$ ، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم، به طوری که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = 3^\circ$$

$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = 6^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد، نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۳. تمام n ‌هایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن‌ها افقی و عمودی باشند و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

به نام او

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز دوم

۴. تمام چندجمله‌ای‌های P با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x ، داشته باشیم:

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2$$

۵. در مثلث ABC ($AB > AC$) نیم‌سازهای رأس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. همچنین نقطه‌ی تقاطع دو نیم‌ساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

۶. جدولی با یک سطر و تعدادی نامتناهی خانه در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد (نظیر شکل زیر)

						
--	--	--	--	--	--	--	-------

در این جدول تعدادی متناهی مهره قرار داده‌ایم به گونه‌ای که در بعضی خانه‌ها تعدادی مهره قرار گرفته است. (در یک خانه می‌تواند بیش‌تر از یک مهره باشد). دو عمل زیر را می‌توان روی مهره‌ها انجام داد:

(۱) اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه به راست برد و یک مهره از خانه‌ی سمت راست را حذف کرد.

(۲) در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌ها را یک خانه به راست و یک مهره‌ی دیگر را دو خانه به سمت چپ برد.

الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا n مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکر شده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n + 1$ جلوتر نخواهد رفت.