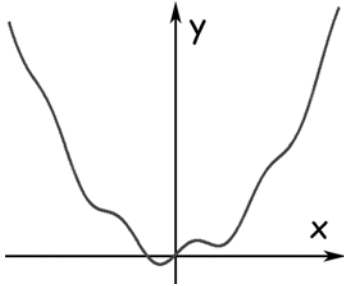


## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۱) نمودار روبرو مربوط به کدام یک از توابع زیر می باشد؟



الف)  $y = \frac{x^2}{10} \cdot \sin x$

ب)  $y = \frac{(\tan x)^2}{10}$

ج)  $y = \cos\left(\frac{x^2}{10}\right) - 1$

د)  $y = \frac{x^2}{10} + \cos x - 1$

ه)  $y = \frac{x^2}{10} + \sin x$

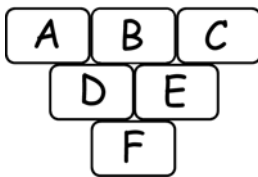
(۲) معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383} + (x+1)^{1382}(x-2) + (x+1)^{1381}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1382} + (x-2)^{1383} = 0$$

ج) ۱۳۸۳

الف) این عبارت همواره صفر است. (ب) ۲

د) ۰ (ه) ۱



(۳)  $A, B, C$  و  $C$  سه مجموعه دل خواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً  $D = A - B$  کدام گزینه حتماً درست است؟

الف)  $F \subseteq C$  (ب)  $B \subseteq F$  (ج)  $F \subseteq A \cap C$  (د)  $A \cap C \subseteq F$  (ه)  $D \cap C \subseteq F$

(۴) ضریب  $x^5$  در چند جمله ای  $(1 + x^6 + x^8)^2 (1 + x^{1382} + x^{1381})^2 (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 1382x^{1381})^2$  چند است؟

الف) ۲۰ (ب) ۳۲ (ج) ۴۰ (د) ۶۴ (ه) ۷۰

(۵) تابع دو متغیره  $f$  به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 2xy + 2x + 1$$

ناصر و منصور به این شکل با هم بازی می کنند که ابتدا ناصر یک عدد به جای  $x$  می گذارد و سپس منصور یک عدد به جای  $y$  قرار می دهد و مقدار تابع، هر چقدر که شد به عنوان امتیاز ناصر در نظر گرفته می شود. اگر منصور خوب بازی کند بیشترین امتیازی که ناصر می تواند به دست آورد چقدر است؟

الف)  $\frac{2}{3}$  (ب)  $\frac{5}{4}$  (ج)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (د)  $-1$  (ه)  $-\sqrt{2}$

(۶) چند جمله ای  $x^3 + ax + 1$  بر  $x^2 - 3x + b$  بخش پذیر است.  $a + 2b$  چند است؟

الف)  $-8$  (ب)  $-\frac{25}{3}$  (ج)  $1$  (د)  $0$  (ه)  $-3$

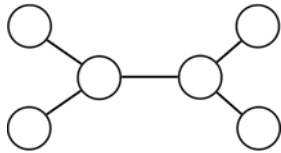
## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۷)  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی  $2 \times 2$  به شکل زیر هستند.

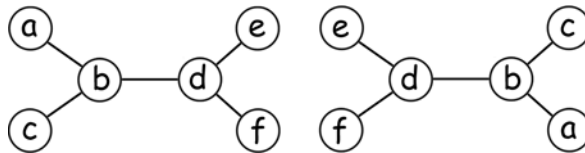
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

چه موقع رابطه  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  برقرار است؟

الف) همواره (ب) وقتی  $x+y=0$  (ج) وقتی  $x=y$  (د) وقتی  $xy=1$  (ه) هیچ‌گاه



(۸) می‌خواهیم در دایره‌های شکل روبرو برچسب‌های  $a, b, c, d, e, f$  را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند. دو برچسب گذاری را متمایز گوئیم هرگاه دو حرف وجود داشته باشند که دایره‌های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیرمجاور باشند (دو دایره را مجاور گوئیم هرگاه بین آن‌ها پاره‌خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب گذاری‌های زیر یکسانند.



چند برچسب گذاری متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۸۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۹۰ (د) ۶۰ (ه) ۴۵

(۹) حداقل چند مستطیل  $2 \times 3$  باید از یک صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل  $2 \times 3$  نتوان از شکل باقی مانده جدا کرد؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۱۰) یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «خوب» می‌نامیم هرگاه جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

(۱۱) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیه ما مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می‌توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

الف) ۱۰۰۰ (ب) ۳۳۰ (ج) ۳۵۰۰۰۰ (د) ۳۷۵ (ه) ۱۰۵۰۰

(۱۲) برای عدد طبیعی  $n$  فرض کنید  $p(n)$  حاصل ضرب ارقام  $n$  در مبنای ۱۰ باشد.  $p(1) + \dots + p(999)$  چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ (ب) ۲۰۷۰ (ج) ۹۱۱۲۵ (د) ۹۳۱۹۵ (ه) ۱۳۲۰۷۰

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۳) دو دایره  $C_1$  و  $C_2$  به مراکز  $O_1$  و  $O_2$  در دو نقطه  $A$  و  $B$  متقاطع می‌باشند. طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطه  $A$  گذشته دو دایره را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کرده است. اگر اندازه وتر  $AM$  برابر ۴ باشد اندازه  $MN$  کدام است؟

- الف)  $4 + 3\sqrt{3}$  (ب) ۷ (ج) ۸ (د)  $4 + 3\sqrt{\frac{12}{5}}$  (ه)  $4\sqrt{5}$



۱۴) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می‌کند. اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار، چندان ساده نیست: این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر  $n$ -چشم را ( $n > 1$ ) قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک چشم، یک سر دو چشم، ... و یک سر  $(n-1)$ -چشم در می‌آورد!

برآورد چون شیر جنگی غریو  
سر و مغزش از گرز او گشت پست

تهمت‌ن چو بشنید گفتار دیو  
بزد بر سر دیو چون پیل مست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ۶، و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸

ب) ۶۱

ج) ۱۶۸

د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پای درآورد!

ه) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

۱۵) توجه کنید که در این سؤال هم مثل همه سؤال‌های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است.

ب) (ج) و (د) هر دو غلط‌اند.

ج) (ج) صحیح است.

د) (د) صحیح است.

ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح‌اند.

۱۶) یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی نیستند چند تا است؟

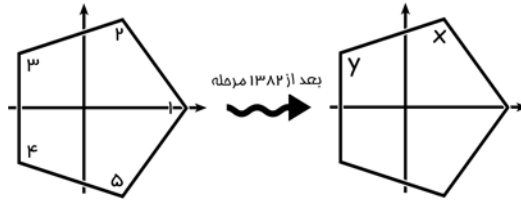
- الف) ۵۸۸ (ب) ۲۹۴ (ج) ۸۸۲ (د) ۱۲۰۰ (ه) ۴۳۲

۱۷) در چهارضلعی  $ABCD$  داریم  $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$  و  $AB = CD$ . اگر  $O$  محل تقاطع  $AC$  و  $BD$  باشد و  $BO = 3$  و  $CB = 5$ ، طول  $CO$  چقدر است؟

- الف) ۴ (ب)  $\sqrt{15}$  (ج)  $\sqrt{14}$  (د) ۳ (ه)  $3\sqrt{4}$

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۸) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می‌دهیم: «نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم،  $۷۲^\circ$  در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم.» در این صورت  $(x, y)$  چند می‌باشد؟



- الف) (۳, ۴)      ب) (۱, ۵)      ج) (۵, ۱)      د) (۴, ۵)      ه) (۵, ۴)

۱۹) در چهارضلعی محدب  $ABCD$  نیمساز زاویه  $ABC$  ضلع  $CD$  را در نقطه  $E$  قطع کرده است. اگر  $\angle AEB = 90^\circ$  و  $\angle CDA = \angle BCD$ ، کدام یک از احکام زیر همواره برقرار است؟

الف)  $ABCD$  چهارضلعی محیطی است.

ب)  $ABCD$  چهارضلعی محاطی است.

ج)  $AB = AD + BC$

د)  $CD = AD + BC$

ه)  $EA \cdot EB = EC \cdot ED$

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 3ab = b^3 \\ 1 + a^5 = b^5 \end{cases}$$

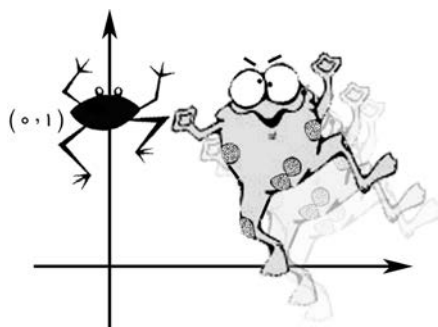
۲۰) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

- الف) ۰      ب) ۱      ج) ۲      د) ۳      ه) نامتناهی جواب

۲۱) بیش‌ترین مقدار  $\lambda$  که برای هر  $a > 0$  نامساوی زیر برقرار باشد، چند است؟

$$a^2 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda \left( a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

- الف) ۰      ب) ۴      ج) ۹      د)  $\frac{5}{4}$       ه) ۶



۲۲) یک قورباغه در نقطه  $(0, 1)$  به مختصات  $(0, 1)$  از صفحه قرار دارد

و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به

مکان فعلی‌اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت

راستش قرار بگیرد) به اندازه فاصله همان لحظه‌اش

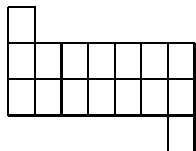
از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵

جهش به نقطه  $(a, b)$  برسد،  $a$  چند است؟

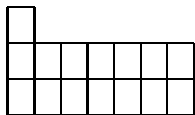
- الف) ۰      ب) ۲۵۶      ج)  $-۱۲۸\sqrt{2}$       د)  $-۲۵۶$       ه)  $-۱۲۸$

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

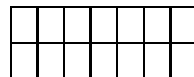
۲۳) تعداد زیادی موزاییک  $1 \times 2$  در اختیار داریم. دو نفر به نوبت روی یک شکل شطرنجی به صورت زیر با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک موزاییک در دو خانه مجاور از شکل که قبلاً پر نشده باشد قرار می‌دهد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده بازی است. در کدام شکل نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برنده بازی باشد؟ (فرض کنید نفر اول به بهترین صورت بازی می‌کند.)



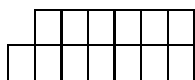
(ج)



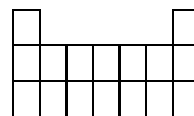
(ب)



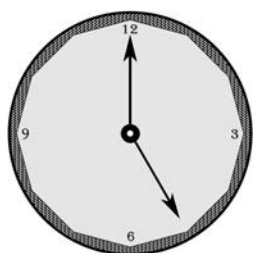
(الف)



(ه)



(د)



۲۴) ساعتی داریم که طول عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار آن برابر است. بین ساعت ۵ تا ۶ چند بار ممکن است عقربه‌ها به گونه‌ای قرار گیرند که ساعت دقیق مشخص نشود؟ مثلاً در حالت روبرو ساعت حتماً ۵ است، و نمی‌تواند ۲۵ : ۱۲ باشد.

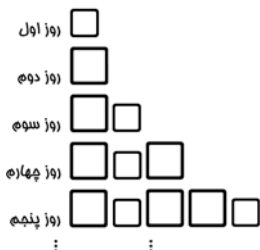
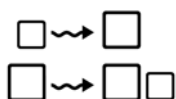
(ه) ۱۳

(د) ۱۲

(ج) ۱۱

(ب) ۱

(الف) ۰

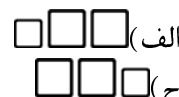


۲۵) بر روی یک رشته بسیار باریک و دراز تعدادی سلول که بعضی کوچک و بعضی بزرگ هستند پشت سر هم قرار گرفته‌اند. بعد از گذشتن هر روز سلول‌های کوچک، بزرگ می‌شوند و سلول‌های بزرگ، یک سلول کوچک در سمت راست خود تولید می‌کنند.

اگر در روز اول تنها یک سلول کوچک داشته باشیم در روز هزار و سیصد و هشتاد و دوم دنباله‌ای طویل از سلول‌ها خواهیم داشت! سه جمله وسط این دنباله کدامند؟



(ج) ۶



(الف) ۸

(ه) در این روز تعداد زوجی سلول وجود دارد و دنباله، وسط ندارد!

(د) ۵

۲۶) فرض کنید  $n$  کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که  $3^n + 2^n$  بر ۱۲۵ بخش پذیر است. مجموع ارقام  $n$  چند است؟

(ب) ۷

(ه) اصلاً چنین  $n$  ای وجود ندارد.

## مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۷) یک عدد طبیعی را «ریشه‌دار» می‌گوییم هرگاه مجذور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

- الف) تعداد اعداد ریشه‌دار نامتناهی است.  
 ب) عدد ریشه‌دار دو رقمی وجود ندارد.  
 ج) عدد ریشه‌دار چهار رقمی وجود ندارد.  
 د) عدد ریشه‌داری به شکل  $9k + 3$  وجود دارد.  
 ه) عدد ریشه‌داری به شکل  $9k + 4$  وجود دارد.

۲۸) از نقطه  $P$  خارج دایره  $(O)$  دو قاطع بردایره رسم می‌کنیم. اولی در  $A$  و  $B$  و دومی در  $C$  و  $D$  دایره را قطع می‌کند. از نقطه  $P$  مماس  $PT$  را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر  $M$  وسط کمان  $AB$  باشد و  $MD$  و  $MC$  به ترتیب،  $AB$  را در  $E$  و  $F$  قطع نمایند و  $\angle ETF = 70^\circ$ ،  $\angle FTP = 30^\circ$ ، آنگاه زاویه  $\widehat{TPE}$  چقدر است؟

- الف)  $60^\circ$  (ب)  $30^\circ$  (ج)  $45^\circ$  (د)  $50^\circ$  (ه)  $75^\circ$

۲۹) در مثلث  $\triangle ABC$ ، طول میانه رأس  $B$ ،  $3$  است و  $\hat{A} = 150^\circ$ . طول میانه رأس  $A$  حداقل چقدر است؟

- الف)  $1$  (ب)  $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$  (ج)  $\frac{3}{4}(3-\sqrt{7})$  (د)  $2$  (ه)  $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

۳۰) خط متغیر  $D$  و غیر گذرنده از نقاط  $B$  و  $C$  همواره دو ضلع  $AB$  و  $AC$  از مثلث  $ABC$  را، به ترتیب، در دو نقطه  $M$  و  $N$  چنان قطع می‌نماید که مساحت مثلث  $AMN$  برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌های  $MNB$  و  $MNC$  می‌باشد. کدام یک از احکام زیر درست است؟

- الف) این خط باید همواره با ضلع  $BC$  موازی باشد.  
 ب)  $\frac{AM}{NB} = \frac{AN}{MC}$   
 ج) این خط باید همواره از یک نقطه ثابت در صفحه مثلث بگذرد.  
 د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع  $AH$  بگذرد.  
 ه) این خط باید همواره بر دایره محاطی داخلی مثلث مماس باشد.