

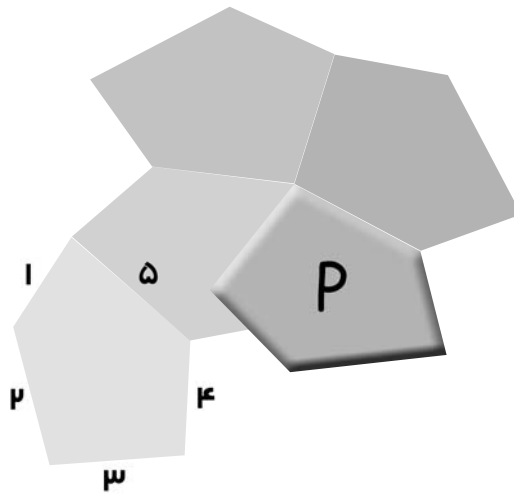
سؤال چند ضلعی

زمان : دو و نیم ساعت

یکشنبه ۱۶/۶/۸۲ ساعت ۸/۳۰

(۱)  $n$  ضلعی دل خواه  $P$  روی صفحه قرار دارد و اضلاع آن با اعداد  $۱, ۲, \dots, n$  شماره گذاری شده اند.

اگر  $S = s_1, s_2, s_3, \dots$  دنباله ای (متناهی یا نامتناهی) باشد که برای هر  $i$ ،  $s_i \in \{۱, ۲, \dots, n\}$  حرکت دادن  $P$  بر حسب  $S$  یعنی این که ابتدا  $P$  را روی ضلع شماره  $s_1$  بغلتانیم سپس آن را حول ضلع به شماره  $s_2$  بغلتانیم و همین طور ادامه دهیم.



$$S = ۵, ۲, ۳, ۲$$

الف) نشان دهید دنباله نامتناهی  $S$  وجود دارد که با حرکت دادن  $P$  طبق آن، همه جای صفحه پوشیده شود.

ب) ثابت کنید دنباله قسمت الف) حتماً غیر متناوب است!

ج) فرض کنید  $P$  پنج ضلعی منتظمی با شعاع دایره محیطی برابر ۱ و  $D$  دایره ای به شعاع  $۱/۰۰۰۰۱$  در جایی دل خواه از صفحه است. آیا دنباله متناهی  $S$  وجود دارد که اگر  $P$  را طبق آن حرکت دهیم کاملاً درون  $D$  بیفتند؟

موفق باشید

بسمه تعالی  
باشگاه دانش پژوهان جوان  
اردوی تابستانی المپیاد ریاضی

سؤال محاسبه‌ای

زمان : یک ساعت

یکشنبه ۱۶/۶/۸۲ ساعت ۱۱/۱۵

(۱) به کمک ماشین حسابی که به شما داده شده ،  $3^{\sqrt{3}}$  را تا ۶ رقم اعشار محاسبه کنید!  
روش کار خود را قشنگ و تمیز توضیح دهید.

(راه‌نمایی : مسأله راه حل خوب دارد ، از کثیف کاری بپرهیزید! )

موفق باشید



بسمه تعالی  
باشگاه دانش پژوهان جوان  
اردوی تابستانی المپیاد ریاضی

سؤال الف ( هندسه

---

زمان : نیم ساعت

یکشنبه ۱۶/۶/۸۲ ساعت ۱۴/۳۰

---

(۱) پاره خط  $AB$  در صفحه مفروض است. بیشترین عدد مانند  $n$  را بیابید که بتوان  $n$  نقطه متمایز  $P_1, P_2, \dots, P_n$  در یک طرف  $AB$  یافت طوری که مثلث های  $ABP_i$  به ازای  $1 \leq i \leq n$  همگی متشابه باشند.  
پس از تعیین این تعداد نقاط ثابت کنید آنها بر روی یک دایره واقع می باشند.  
موفق باشید

بسمه تعالی  
باشگاه دانش پژوهان جوان  
اردوی تابستانی المپیاد ریاضی

سؤال ترکیبیات

زمان : یک ونیم ساعت

یکشنبه ۱۶/۶/۸۲ ساعت ۱۵/۱۵

(۱) فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای  $n$  عضوی باشد و  $0 \leq k \leq n$ . ماکسیمم تعداد جایگشت‌هایی از مجموعه  $X$  را که هر دو تا حداقل  $k$  مؤلفه مشترک داشته باشند با  $a_{n,k}$  نشان می‌دهیم؛ همچنین ماکسیمم تعداد جایگشت‌هایی از مجموعه  $X$  را که هر دو تا حداکثر  $k$  مؤلفه مشترک داشته باشند با  $b_{n,k}$  نشان می‌دهیم ( $x \in X$  را یک مؤلفه مشترک دو جایگشت  $f$  و  $g$  از مجموعه  $X$  گوئیم هرگاه  $f(x) = g(x)$ ).  
الف) ثابت کنید

$$a_{n,k} \cdot b_{n,k-1} \leq n!$$

ب) فرض کنید  $p$  عددی اول باشد. مقدار دقیق  $a_{p,2}$  را بیابید.

موفق باشید

• مقدمه

همان طور که می دانید پاره خط جسمی یک بعدی، مربع توپر جسمی دو بعدی و مکعب توپر جسمی سه بعدی است. می خواهیم مفهوم «بعد» را برای مجموعه بزرگ تری از اجسام تعریف کنیم. قبل از هرکاری لازم است تصویری که از «بعد» داریم را مرور کنیم. در واقع به این سؤال جواب دهیم:

یک تعریف خوب برای «بعد» باید چه خواصی داشته باشد؟

(۱) «بعد» هر مکعب  $n$  بعدی مثلاً  $[0, 1]^n$ ، باید  $n$  باشد.

(۲) باچند برابر کردن یک جسم، «بعد» آن تغییر نکند.

(۳) اگر  $A \subseteq B$  آنگاه «بعد»  $A$  باید کوچک تر یا مساوی «بعد»  $B$  باشد.

(۴) «بعد»  $A \cup B$  باید برابر ماکزیمم «بعد»  $A$  و «بعد»  $B$  باشد.

البته همه تعریف های متداول همه خواص بالا را ندارند. تصور دیگری که از «بعد» داریم این است که این مفهوم در مرتبه ای بالاتر از مفاهیم اندازه ای، مانند طول، مساحت و حجم، اجسام را رده بندی می کند. به این معنی که وقتی می گوییم «بعد»  $A$  کم تر از «بعد»  $B$  است، ادعای بسیار قوی تری کرده ایم نسبت به زمانی که به عنوان مثال بگوییم مساحت  $A$  کم تر از مساحت  $B$  است.

• بعد جعبه ای

از این به بعد منظور از یک جسم در  $\mathbb{R}^n$ ، زیر مجموعه ای بسته، کران دار و ناتهی از آن است. فرض کنید می خواهیم تعدادی گلوله به قطر  $r$  را داخل جعبه ای مکعب شکل جا دهیم. حداکثر چند گلوله می تواند در این جعبه جای گیرد؟ واضح است که جواب این سؤال بر حسب  $r$  تابعی نزولی است و وقتی  $r$  به صفر میل کند این تعداد به بی نهایت میل می کند.

تعریف: فرض کنید  $X$  جسمی در  $\mathbb{R}^n$  باشد. به ازای  $r > 0$ ، تعداد اعضای بزرگ ترین زیر مجموعه  $X$  است که فاصله دو به دو اعضای آن دست کم  $r$  باشد.

سؤال ۱. فرض کنید  $X = [0, 1]^k$ . نشان دهید  $M, m > 0$  وابسته به  $k$  وجود دارد که برای هر  $0 < r < 1$ ،

$$mr^{-k} \leq N_X(r) \leq Mr^{-k}.$$

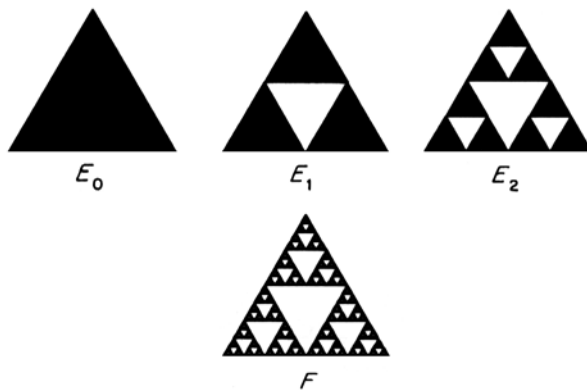
(اگر فضای  $k$  بعدی برای شما هراسناک است (!) لااقل حکم را برای  $k = 1, 2, 3$  ثابت کنید.)

سؤال ۲. با ایده گرفتن از سؤال قبل برای جسم  $X$ ، «بعدی» تعریف کنید که چهار خاصیت ذکر شده را داشته باشد. البته ممکن است با تعریفی که ساخته‌اید «بعد» بعضی اجسام تعریف نشده باشد.

### • اجسام خود متشابه

تعریف: فرض کنید  $X$  یک جسم است و به علاوه  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m$  که برای  $1 \leq k \leq m$ ،  $X_k$  تجانس یافته  $X$  با ضریب تجانس  $\lambda_k$  است ( $0 < \lambda_k < 1, m \geq 2$ ).  
 در این صورت می‌گوییم  $X$  یک شکل خود متشابه است.

مثال ۱. مثلث سرپینسکی. مثلثی متساوی الاضلاع را فرض کنید، آن را مانند شکل به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید و قسمت وسطی را بدون مرز آن حذف کنید. سپس همین کار را روی سه مثلث باقی مانده انجام دهید. به این ترتیب دنباله‌ای تو در تراز زیر مجموعه‌های صفحه خواهیم داشت.



اشتراک این مجموعه‌ها را مثلث سرپینسکی می‌نامند.

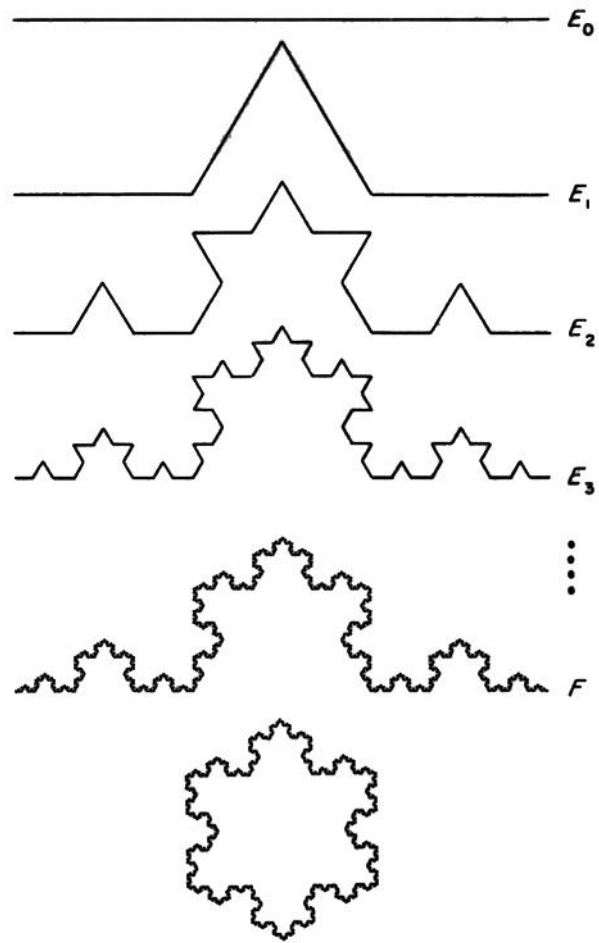
سؤال ۳. «بعد» مثلث سرپینسکی را به دست آورید.

سؤال ۴. فرض کنید  $X$  جسمی در  $\mathbb{R}^2$  باشد که دست کم شامل دو نقطه است و

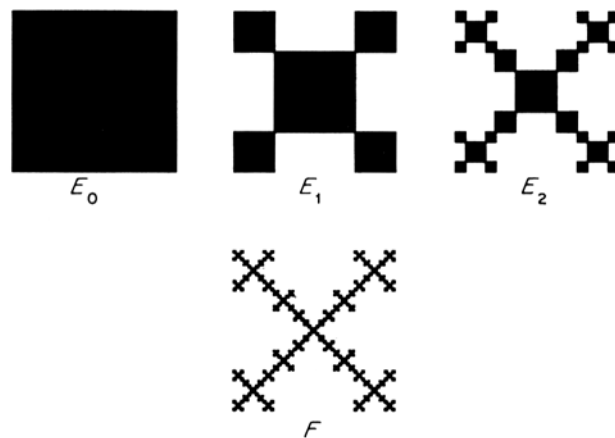
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} rN_X(r) = 0$$

ثابت کنید خطی وجود دارد که  $X$  را قطع نمی‌کند و نقاط  $X$  در دو طرف آن خط می‌افتند.

مثال ۲. خم کخ. شکل به اندازه کافی گویاست. با کنار هم قرار دادن سه نسخه از خم کخ، دانه برف کخ ساخته می‌شود.



مثال ۳. بدون نام! بدون شرح!



بسمه تعالی  
باشگاه دانش پژوهان جوان  
اردوی تابستانی المپیاد ریاضی

سؤال نظریهٔ اعداد

زمان : یک و نیم ساعت

دوشنبه ۱۳۹۲/۶/۱۵ ساعت ۱۱/۱۵

(۱) عدد صحیح  $n$  را خوب می نامیم هرگاه  $|n|$  مربع کامل نباشد.  
تمام اعداد صحیح مانند  $m$  را بیابید به طوری که بتوان آن را به بی نهایت طریق به  
شکل جمع سه عدد خوب متفاوت نوشت طوری که حاصل ضرب آن سه عدد، مربع یک  
عدد صحیح فرد باشد.

موفق باشید



بسمه تعالی  
باشگاه دانش پژوهان جوان  
اردوی تابستانی المپیاد ریاضی

سؤال ب ( هندسه

---

زمان : چهل و پنج دقیقه

دوشنبه ۱۴/۳۰ ساعت ۸۲/۶/۱۷

---

۱) یک نقطه نورانی در فضا قرار گرفته است. آیا می توانیم با تعداد متناهی کره هم اندازه  
جدا از هم مانع نورافشانی آن به دور دست شویم؟

موفق باشید

بسمه تعالی  
باشگاه دانش پژوهان جوان  
اردوی تابستانی المپیاد ریاضی

سؤال ج) هندسه

---

زمان : یک ساعت

دوشنبه ۱۳۹۷/۶/۸ ساعت ۱۵/۳۰

---

۱) در یک چهاروجهی چهار دایره محیطی چهاروجه با هم برابرند. ثابت کنید هر دو یال رو به رو با هم برابر می باشند.

موفق باشید