

(۱) پس از بسط دادن $(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 9x^8 + 10x^9)^2$ ، چند تا از ضرایب فرد است؟

- الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

(۲) در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره یک نشسته است. فاصله سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ i ام باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلوتر بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشتن به سمت چپ، به سنگ شماره ۷ برود؟



- الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

(۳) به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ انتخاب کرد به طوری که هر دو تا از آن‌ها دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند؟

- الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۸۰

(۴) به ازای چند عدد طبیعی n ، $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ عددی اول است؟ $[x]$ جزء صحیح x است.

- الف) یک ب) دو ج) سه د) بی‌نهایت ه) چنین عددی وجود ندارد.

(۵) چهارضلعی $ABCD$ در بین چهارضلعی‌هایی که داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارند، بیش‌ترین مساحت را دارد. مساحت $ABCD$ چه قدر است؟

- الف) ۱ ب) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ج) $\frac{6}{5}$ د) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ه) $\sqrt{2}$

(۶) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز زاویه C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام یک از اعداد زیر است؟

- الف) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $\sqrt{2}$ د) $\frac{1}{3}$ ه) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۷) سهمی $y = x^2 - 2ax + 1$ و خط $y = 2b(a - x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی‌کنند}\}$$

مساحت A چقدر است؟

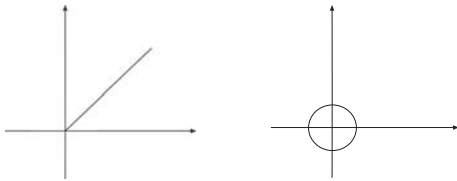
الف) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (ج) A بی‌کران است. (د) ۱ (ه) π

۸) خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y = x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران‌داری یا بی‌کران) تقسیم شده است؟

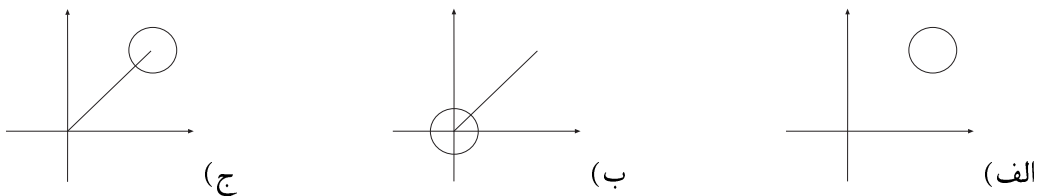
الف) ۶۳ (ب) ۸۱ (ج) ۱۲۱ (د) ۱۲۷ (ه) ۲۱۶

۹) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه $A \oplus B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$



اگر A و B پاره‌خط و دایره نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آنگاه $A \oplus B$ کدام یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟



۱۰) قطر یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول

بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دو مجموعه A و B برابر d است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار قطر

$A \oplus B$ چه قدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

الف) d و d (ب) $\sqrt{3}d$ و $\sqrt{3}d$ (ج) d و $2d$ (د) $\sqrt{2}d$ و $2d$ (ه) $2d$ و $3d$

(۱۱) مجموعه‌های A_k ، $k \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} A_1 = \text{مجموعه اعداد اول} \\ A_{k+1} = \{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{k+1} \mid a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in A_k\} \end{cases}$$

توجه کنید که a_1, a_2, \dots و a_{k+1} لزوماً متمایز نیستند. کدام یک از اعداد زیر، دست کم عضویکی از A_k ها است؟

الف) $2^{243} \times 3^7$ ب) $5^{25} \times 2^{25}$ ج) $2^{231} \times 7^{25}$ د) $2^{111} \times 3^9$ ه) $2^{60} \times 3^{12} \times 5^6$

(۱۲) به ازای چند مقدار طبیعی برای a ، معادله $\frac{1}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{1}{y}$ در مجموعه اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین a ای وجود ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) چهار تا ه) بی‌نهایت

(۱۳) می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC ، قرینه مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع

BC روی دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه زاویه DAC برابر است با

الف) $\frac{\hat{A}}{2}$ ب) $\frac{\hat{B}}{2}$ ج) $90^\circ - \hat{A}$ د) $90^\circ - \hat{B}$ ه) $90^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

(۱۴) فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی وارون‌پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{1-f(x)}$. اگر h وارون‌پذیر باشد، آنگاه

$$\frac{x}{f \circ h^{-1}(x)} - x$$

الف) $f(x)$ ب) $h(x)$ ج) kx د) k ه) $\frac{x}{f(x)} - x$

(۱۵) کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها

زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو

روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همه تاها را باز کرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تایی

افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵۹ د) ۳۱۷ ه) ۳۱۸

(۱۶) مربع توپری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه نقاطی که فاصله آن‌ها دست کم از یکی از نقاط

مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد، چه قدر است؟

الف) ۲ ب) $2(1 + \frac{2}{3}\pi)$ ج) $2(1 + \pi)$ د) ۸ ه) $2(1 + \frac{5}{3}\pi)$

۱۷) فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۵۰۴۰ (ه) ۱۰۰۸۰

۱۸) فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۱+۲a$ ، $۲+۳a$ ، $۳+۴a$ و یا $۴+۵a$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰۱۳۸۳ - ۱$ رسید؟

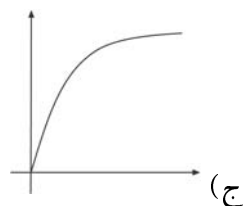
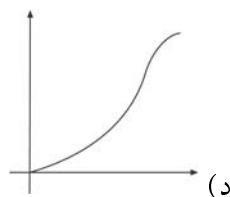
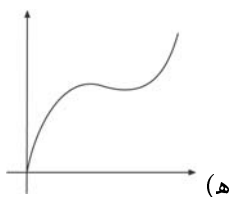
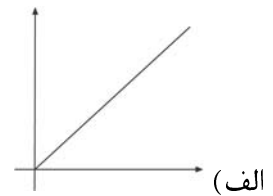
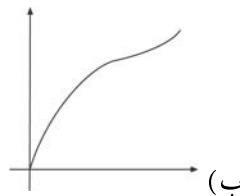
- الف) ۱۰ (ب) ۱۱ (ج) ۱۲ (د) ۱۳ (ه) هیچ کدام

۱۹) فرض کنید $f_0(x) = x$ و برای هر $n \geq 0$ ، $f_{n+1}(x) = \sqrt{1 - f_n(x)}$. دامنه تابع $f_{۱۳۸۳}(x)$ کدام است؟

- الف) $(-\infty, 1]$ (ب) $[0, 1]$ (ج) $[0, \frac{1}{۲۱۳۸۳}]$ (د) $\{1\}$ (ه) $\{0\}$



۲۰) در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نشان‌دهنده ارتفاع آب بر حسب زمان باشد؟

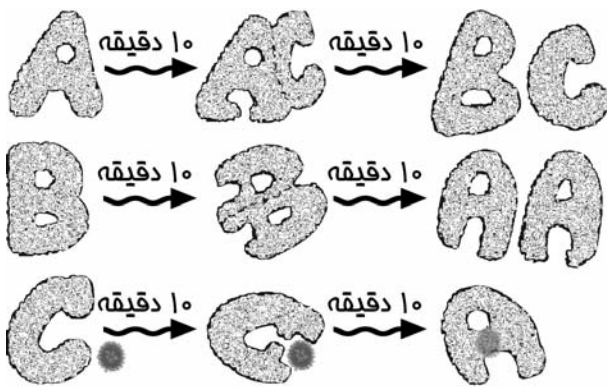


۲۱) در دایره‌ای به شعاع واحد، AB کمانی 60° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و YB یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY چیست؟

- الف) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{۲}$ (ب) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{3}}{۳}$ از آن
 ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{۳}$ (د) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{3}}{۳}$ از آن
 ه) دایره‌ای به شعاع ۱

(۲۲) یک عدد طبیعی را یکنوا می‌گوییم هرگاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۲، ۲۰۳۴ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰ (ب) ۹۹۹۹۸۰ (ج) ۷۹۵۵۴۲۰ (د) ۱۲۶۰۰۰۰ (ه) ۴۹۴۹۵۵۰



(۲۳) بیماری کشنده ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A ، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C ، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به علاوه هر بار که A به C تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز

می‌خورد! اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟

الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار (ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون (ج) بین ۱ تا ۵ میلیون (د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون (ه) بیش از ۱۰ میلیون

(۲۴) دستگاه معادلات روبه‌رو را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس‌هایی 2×2 ، I ماتریس همانی 2×2 و \bar{O} ماتریس 2×2 با درایه‌های صفر است. داریم

$$\begin{cases} 2A^6 + 2A^2 + A + B = \bar{O} \\ A^2 - A + I = \bar{O} \end{cases}$$

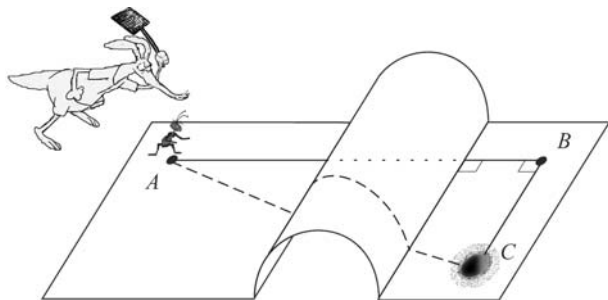
الف) $3A + B = \bar{O}$ (ب) $A + B = I$ (ج) $A + 3B = \bar{O}$ (د) $A^2 + B^2 = \bar{O}$ (ه) این دستگاه جواب ندارد.

(۲۵) می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهم‌رنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهم‌رنگ a و b ، یا باقیمانده a بر b ۱۱ متفاوت باشد، یا باقیمانده a بر b ۱۷. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تا است؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۷ (د) ۲۱ (ه) ۱۴۷

۲۶) معادله $\frac{x}{3} + \left[\frac{x}{3}\right] = \sin x + [\sin x]$ چند جواب حقیقی دارد؟ $[a]$ جزء صحیح a است.

الف) جواب ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) سه تا ه) پنج تا



۲۷) در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است

$(\hat{B} = 90^\circ)$ و $AB = 10 - \pi$ و $BC = 6$.

نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر

AB ، بین نقاط A و C مانع شده است. مورچه بنا به

دلایلی (!) باید هرچه سریع‌تر از نقطه A به لانه‌اش در نقطه C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با

الف) $\sqrt{136}$ ب) $\sqrt{136} - \pi$ ج) 10 د) $7 + \pi$ ه) 11

۲۸) مهره‌ای در مبداء مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m, n) ، $(-m, -n)$ ،

$(n + 1, m + 1)$ یا $(-n - 1, -m - 1)$ به نقطه دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به‌ازای کدام

یک از (m, n) های زیر می‌توان مهره را به هر نقطه صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $m = 1$ و $n = 3$ ب) $m = 2$ و $n = 3$ ج) $m = 3$ و $n = 5$

د) $m = 4$ و $n = 7$ ه) به‌ازای هیچ m و n ای نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۹) فرض کنید $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. باقی‌مانده تقسیم $f(x^{12})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^3 + x^2 + x + 1$ ب) $x^2 - x + 6$ ج) $x + 6$ د) 6 ه) $6 - x$

۳۰) یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در یکی از وضعیت‌های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد.



می‌دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر

می‌کند. ابتدا هر سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر

پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می‌کند. حال اگر کلید

دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می‌شود؟

الف) قرمز ب) زرد ج) سبز

د) فقط می‌توان گفت سبز نیست. ه) هر رنگی ممکن است باشد.