

به نام او

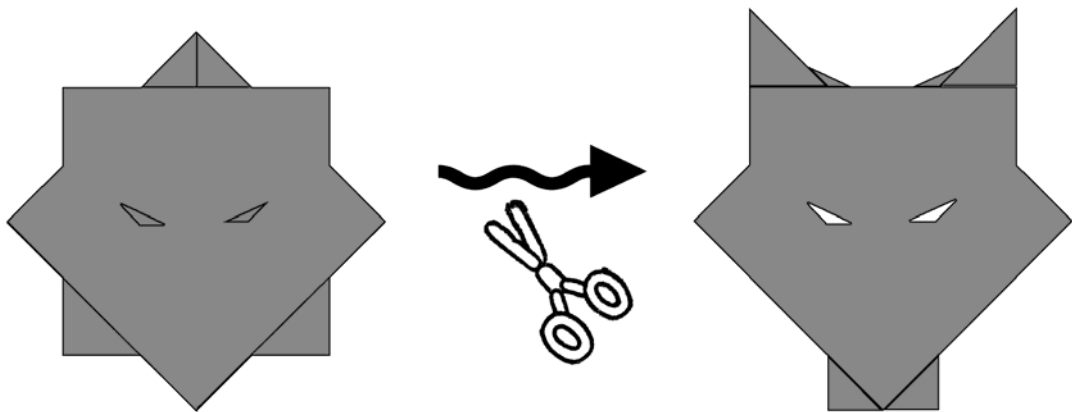
## امتحان خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

سه‌شنبه ۱۳/۶/۸۶

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

(۱) دو چندضلعی  $P$  و  $Q$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با برش  $P$ ، تقسیم آن به چندضلعی‌های کوچک‌تر و کنار هم گذاشتن مجدد این قطعات، بدون این که روی هم قرار گیرند،  $Q$  را بسازیم، ولی مجاز نیستیم قطعات را بچرخانیم یا قرینه کنیم، بلکه فقط می‌توانیم آن‌ها را انتقال دهیم.



- الف) ثابت کنید هر دو مستطیل هم‌مساحت، حتی اگر اضلاعشان موازی نباشند، قابل تبدیل به هم هستند.  
ب) ثابت کنید دو مثلث اگر انتقال‌یافته هم نباشند قابل تبدیل به هم نیستند.  
ج) سعی کنید شرط‌های لازم و شرط‌های کافی خوبی برای قابل تبدیل بودن دو چندضلعی بیابید.

موفق باشید.

به نام او

## امتحان خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

سه‌شنبه ۸۶/۶/۱۳

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

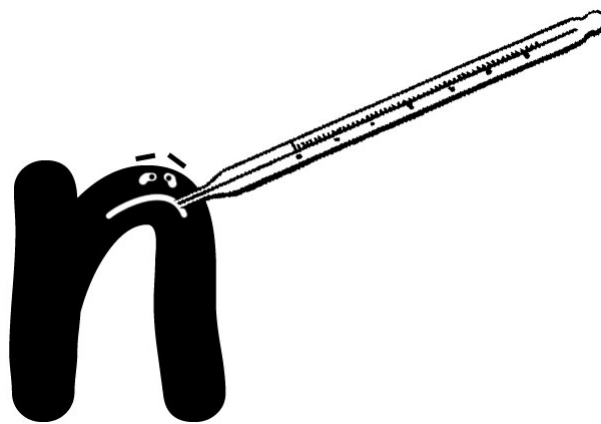
۲) می‌گوییم نگاشتی مانند  $\Delta : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  نگاشت درجه است اگر برای هر  $a, b \in \mathbb{Z}$  که  $b \nmid a$  و  $b \neq 0$  اعداد صحیح  $r$  و  $s$  موجود باشند که  $a = br + s$  و  $\Delta(s) < \Delta(b)$ .

الف) نشان دهید نگاشت زیر نگاشت درجه است.

$\delta(n) =$  تعداد ارقام  $|n|$  در مبنای دو

ب) ثابت کنید نگاشت درجه‌ای مثل  $\Delta_*$  وجود دارد که از هر نگاشت درجه دیگر کوچک‌تر است؛ یعنی برای هر نگاشت درجه  $\Delta$  و برای هر  $n \neq 0$ ،  $\Delta_*(n) \leq \Delta(n)$ .

ج) ثابت کنید  $\Delta_* = \delta$ .



موفق باشید.

به نام او

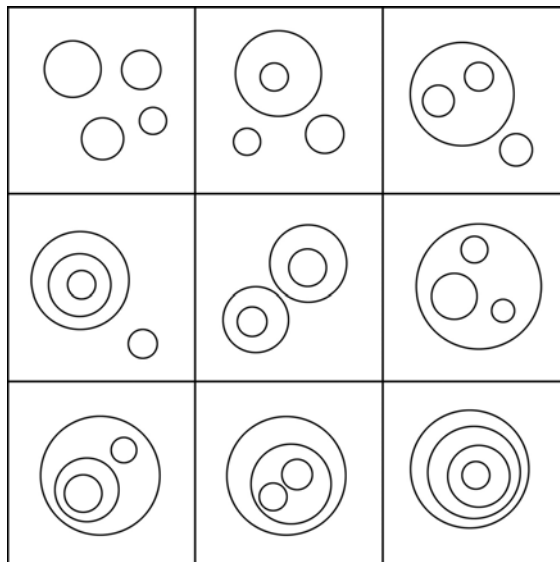
امتحان خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

سه‌شنبه ۸۶/۶/۱۳

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۳) دو آرایش از تعدادی دایره نامتقاطع در صفحه را از یک نوع گوییم اگر بتوان با جابجا کردن و بزرگ و کوچک کردن دایره‌های یکی، بدون این که هم‌دیگر را قطع کنند، به دیگری رسید. تعداد انواع آرایش‌های  $n$  دایره در صفحه را با  $a_n$  نشان می‌دهیم. چند جمله اول دنباله  $\{a_n\}$  عبارتند از: ۱، ۲، ۴، ۹، ...



۹ نوع آرایش مختلف ۴ دایره در صفحه ( $a_4 = 9$ )

اگر اعداد مثبت  $A, B, a, b$  پیدا شوند که  $Aa^n \leq a_n \leq Bb^n$ ، می‌گوییم نرخ رشد  $\{a_n\}$  بیشتر یا مساوی  $a$  و کمتر یا مساوی  $b$  است.

الف) نشان دهید نرخ رشد  $\{a_n\}$  بیشتر یا مساوی ۲ و کمتر یا مساوی ۴ است.

ب) سعی کنید کران‌های به‌تری برای نرخ رشد  $\{a_n\}$  پیدا کنید.

موفق باشید.

به نام او

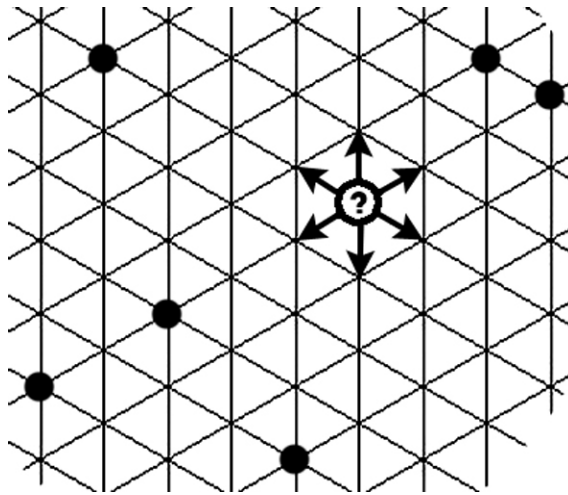
## امتحان خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

سه‌شنبه ۸۶/۶/۱۳

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۴) در شبکه مثلثی زیر منظور از فاصله دو رأس شبکه طول کوتاه‌ترین مسیر شبکه‌ای بین آن دو است. فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_n$  رئوس ثابتی از شبکه باشند. می‌خواهیم رأسی از شبکه بیابیم که مجموع فواصلش تا این  $n$  رأس کم‌ترین مقدار باشد. برای این کار از رأس دل‌خواهی شروع می‌کنیم و در هر گام، اگر از بین ۶ رأس مجاور رأسی بود که مجموع فواصلش کم‌تر بود به آن می‌رویم؛ اگر تعداد چنین رئوسی بیش از یک بود، یکی را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم.



روشن است که این الگوریتم سرانجام متوقف می‌شود.

الف) نشان دهید نقطه توقف، جواب مسأله است.

ب) آیا این الگوریتم برای هر گراف هم‌بند دیگر هم به نتیجه مطلوب می‌رسد؟

موفق باشید.



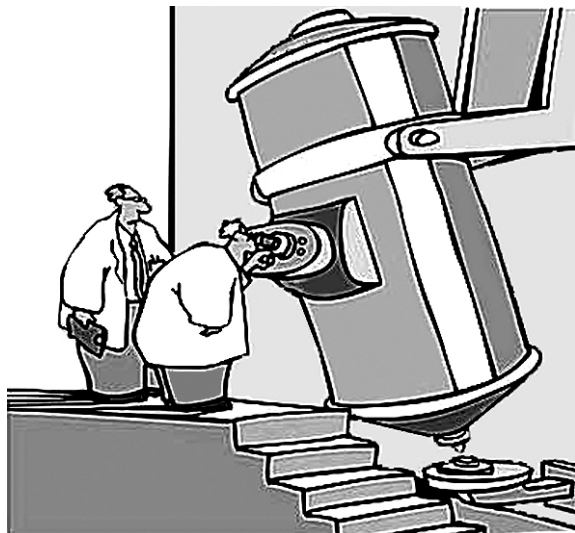
به نام او

## امتحان خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

چهارشنبه ۸۶/۶/۱۴

مدت امتحان ۶۰ دقیقه



۶) دانشمندان اخیراً موفق شده‌اند به کمک میکروسکوپ‌های بسیار قوی لابه‌لای اعداد حقیقی اعداد جدیدی کشف کنند! با پی‌گیری این کشف، دستگاه اعداد حقیقی به دستگاه بزرگ‌تری توسعه یافته است که اعضای آن را می‌توان مشابه اعداد حقیقی با هم مقایسه کرد و چهار عمل اصلی را روی آن‌ها انجام داد. خوش‌بختانه تمام روابط جبری و ترتیبی که برای اعداد حقیقی برقرار است برای این دستگاه توسعه یافته هم برقرار است.

الف) ثابت کنید در این دستگاه بزرگ‌تر عددی وجود دارد که از هر عدد حقیقی مثبت کوچک‌تر است ولی از صفر بزرگ‌تر است!

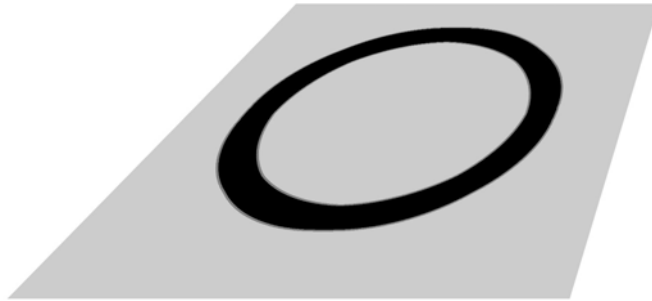
ب) ثابت کنید هیچ عدد جدیدی ریشه یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب حقیقی نیست.

موفق باشید.

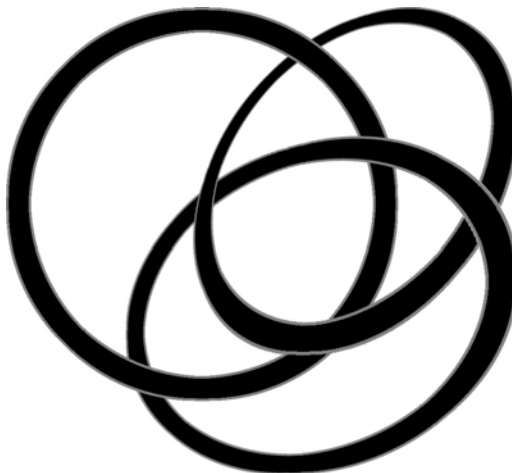
به نام او  
امتحان خلاقیت  
دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

چهارشنبه ۸۶/۶/۱۴  
مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۷) منظور از حلقه شکلی است که از ناحیه بین دو دایره هم‌مرکز در یک صفحه تشکیل می‌شود و پهنای حلقه یعنی اختلاف شعاع این دو دایره.



الف) آیا می‌توان ناشمارا حلقه دوبه‌دو مجزا با پهنای یک در فضا طوری قرار داد که هر دوتای آن‌ها در هم گیر کرده باشند؟ توجه کنید که اندازه حلقه‌ها می‌تواند برابر نباشد.  
ب) جواب سؤال فوق در مورد حلقه‌های با پهنای صفر (دایره‌ها) چیست؟

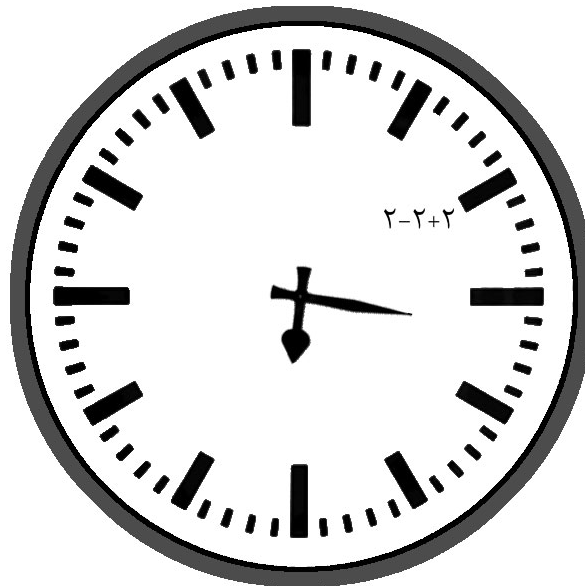


موفق باشید.

به نام او  
امتحان خلاقیت  
دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

چهارشنبه ۸۶/۶/۱۴  
مدت امتحان ۲۰ دقیقه

۸) در این سؤال شما باید اعداد ساعت (یک تا دوازده) را با سه رقم ۲ و نمادهای ریاضی بسازید. توجه کنید که در هر عدد باید دقیقاً سه رقم ۲ به کار رود، نه کم‌تر و نه بیش‌تر. در ضمن نباید از نمادهایی که در آن‌ها از حروف فارسی یا انگلیسی استفاده شده مثل «حد» و «*Sin*» استفاده کنید. معطل نکنید، مشغول شوید و خلاقیت پیاشانید!



توجه: در این ۲۰ دقیقه به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود!

موفق باشید.