

به نام او

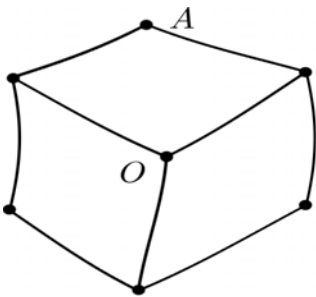
مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۶

روز اول

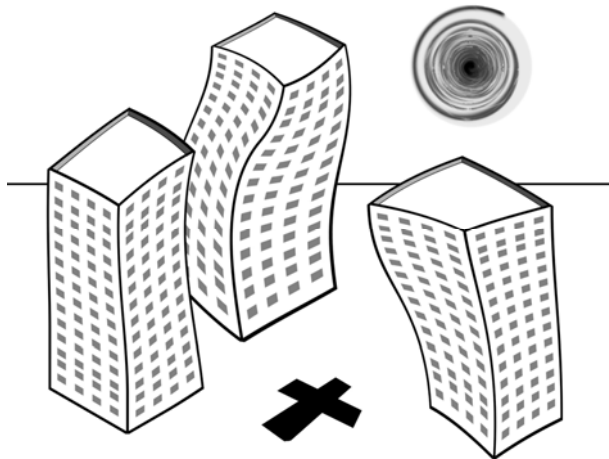
زمان: چهار ساعت و نیم

(۱) در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD=AM$. محل برخورد دو دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



(۲) دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A ؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n + 1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند.)

(۳) در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از 45° درجه بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده



ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمانی قبلی به هم مشرف نباشند می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ای افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمودی بر روی صفحه در نظر بگیرید.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او
مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز دوم

چهارشنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۶

(۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n ، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

(۵) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را، به ترتیب، N و N' می‌نامیم. نشان دهید

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

(۶) فرهاد برای جشنواره خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n دقیقاً یکی از سه عدد n ، $2n$ و $3n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید عدد ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.



بارم هر سؤال ۷ نمره است.