



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

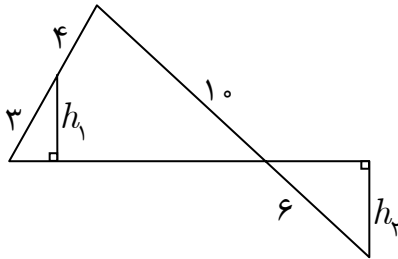
$$\begin{array}{r} 228 \\ *** \\ \times 9 \\ \hline 1*** \end{array}$$

۱. ارقام ستاره‌دار در حاصل ضرب روبه‌رو نامعلوم‌اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل ضرب چه قدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بر یک حاصل شده‌اند.)

- الف) ۵ (ب) ۹ (ج) ۱۸ (د) ۲۷ (ه) ۳۶

۲. چند سه‌تایی (a, b, c) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a ، b و c برابر ۷۰۰۰ باشد؟

- الف) ۱۰۰۸ (ب) ۲۱۸۷ (ج) ۵۱۰۳ (د) ۵۴۸۸ (ه) ۹۵۸۳



۳. در شکل روبه‌رو، نسبت h_1 به h_2 چه قدر است؟

- الف) $0/8$ (ب) ۱ (ج) $1/2$ (د) $1/4$ (ه) ۲

۴. طول سه میانه‌ی مثلثی، ۵، ۵ و ۸ سانتی‌متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟

- الف) ۲ (ب) $3\sqrt{7}$ (ج) $\frac{\sqrt{19}}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$ (ه) ۴

۵. در بسط $(1 + x^3 + x^6)^{50}$ چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

- الف) ۵۱ (ب) ۱۰۱ (ج) ۱۵۱ (د) ۲۰۱ (ه) ۳۰۱

۶. تعداد مقسوم‌علیه‌های $2008 \times (1387! + 1430)$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $1387! + 1430$ است؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۲۰۰

۷. چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

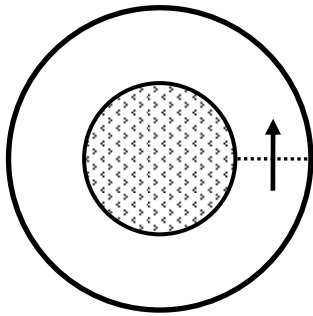
- الف) ۸ (ب) ۱۲ (ج) ۱۶ (د) ۲۴ (ه) ۳۶



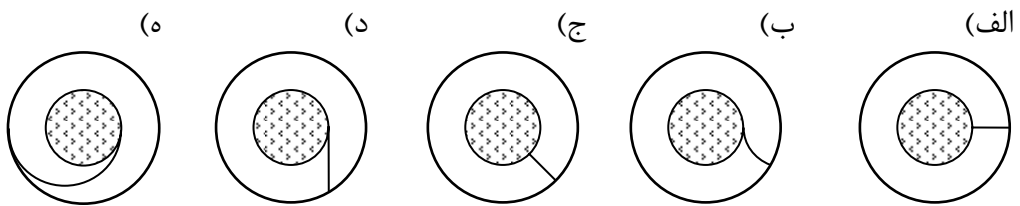
آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۸. ده نفر، با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میزی نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از نفر سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

- الف) ۹۸ ب) ۹۹ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۱ ه) ۱۰۲



۹. در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دوندگان روی دایره‌های متحدالمرکز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه‌ی پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دوندگان مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



۱۰. برای دو عدد مثبت a و b ، M و G را به ترتیب میانگین حسابی $(\frac{a+b}{2})$ و میانگین هندسی (\sqrt{ab}) در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد k را بیابید که نابرابری زیر برای هر a و b حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$|M - G| \leq k|a - b|$$

- الف) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$ ه) ۱

۱۱. کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه‌ی غیر قائمه‌ی مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع، ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

- الف) ۸۴۱ ب) ۹۰۰ ج) ۹۶۱ د) ۱۰۲۴ ه) ۱۰۸۹



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چه قدر است؟

- (الف) $\sqrt{2} - 1$ (ب) $2 - \sqrt{3}$ (ج) $2\sqrt{3} - 3$
(د) $\sqrt{3} - 1$ (ه) $2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

۱۳. دو ماتریس A و B را هم‌توان گوئیم اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند که $A^m = B^n$. کدام گزینه نادرست است؟

(الف) اگر A و B هم‌توان و B و C هم‌توان باشند، آن‌گاه A و C نیز هم‌توان اند.
(ب) اگر A و I هم‌توان باشند، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

- (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هم‌توان اند.
(د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ هم‌توان اند.
(ه) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هم‌توان اند.

۱۴. چند سه‌تایی (a, b, c) از اعداد تک‌رقمی ناصفر وجود دارد که $b \neq c$ و مجموعه‌ی ارقام دو عدد $a \times b$ و $a \times c$ یک‌سان باشند؟

- (الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۱۲

۱۵. شانزده نقطه در یک شبکه‌ی مربعی 4×4 قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه تایی هم‌خط نباشند؟

- (الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰



۱۶. چرخ‌ی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع هر پله‌ی آن نیم متر و طول هر پله‌ی آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟

- (الف) $2 + \pi$ (ب) $2 + \frac{4}{3}\pi$ (ج) $2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ (د) $4 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۷. x_1, \dots, x_9 جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو است. x_5 چند است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \\ \vdots \\ x_8 + x_{10} = 2x_9 \\ x_9 + x_1 = 22 \\ x_{10} + x_2 = 26 \end{cases}$$

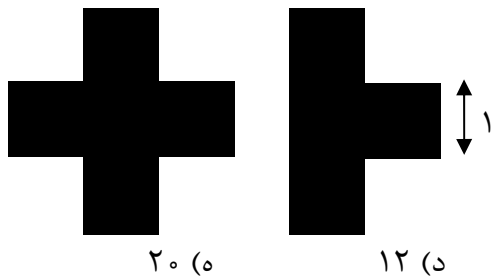
الف) ۰ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۱ ه) ۱۶

۱۸. یک جدول 8×8 که هر خانه‌ی آن مربعی به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه‌ی مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

الف) ۱۲۹۶ ب) ۴۰۹۶ ج) ۱۴۴۰۰ د) ۱۶۴۰۰ ه) ۲۴۳۸۴

۱۹. سه رقم سمت راست 21^{64} کدام است؟

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ ه) ۳۸۱



۲۰. جسمی سه بعدی را بر روی صفحات $x - y$ و $y - z$ تصویر کرده‌ایم و دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه بعدی می‌تواند داشته باشد، چه قدر است؟

الف) ۶ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۲ ه) ۲۰

۲۱. نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به خط $y + 5x = 0$ قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

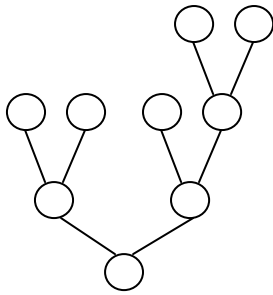
- الف) نمودار یک تابع پوشا است.
ب) نمودار یک تابع نزولی است.
ج) نمودار یک تابع صعودی است.
د) نمودار یک تابع نزولی است.
ه) نمودار یک تابع نیست.

۲۲. مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیش‌تر است؟

الف) $20 + 2^{100}$ ب) $12 + 2^{100}$ ج) $8 + 2^{100}$ د) $4 + 2^{100}$ ه) 2^{100}



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۳. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کمتر باشد؟

الف) ۱۶ ب) ۹۶ ج) ۴۴۸ د) ۸۹۶ ه) ۳۶۲۸۸۰

۲۴. معادله‌ی $2^{b-a} + a = b^2$ در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۵. مثلث به رأس‌های A ، B و C دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه‌ی ثابت P ، به ترتیب، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و در بین مثلث‌های با این خاصیت، بیش‌ترین مساحت را دارد. نسبت فاصله‌ی P از ضلع AB به فاصله‌ی P از ضلع BC ، چه قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۲ د) $\frac{2}{3}$ ه) $\frac{7}{10}$

۲۶. x و y و z جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو در بازه‌ی $(-\pi, \pi]$ هستند. $x^2 + y^2 + z^2$ کدام گزینه است؟

الف) ۰ ب) $\frac{\pi^2}{4}$ ج) $\frac{3\pi^2}{4}$ د) $\frac{8\pi^2}{9}$ ه) $\frac{27\pi^2}{4}$

۲۷. زیرمجموعه‌های A_0, A_1, A_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت روبه‌رو تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو A_1 نیست؟ (توجه کنید که $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$)

$$\begin{cases} A_0 = \emptyset, A_1 = \{1\} \\ A_n = (A_{n-1} \Delta A_{n-2}) \cup \{n\} \end{cases}$$

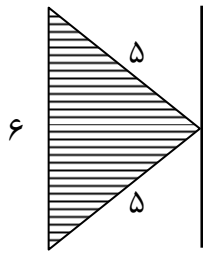
الف) ۶۹ ب) ۷۰ ج) ۷۱ د) ۷۲ ه) ۷۳



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. چراغ‌قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آنها سالم است. با دست‌کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ‌قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ‌قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود).

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷



۲۹. مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده‌ی ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده‌ی آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه قدر است؟

- الف) 12π ب) 48π ج) 64π د) 72π ه) 96π

۳۰. در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره در خانه‌ی ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه‌ی ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه‌ی گوشه‌ی پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

- الف) $\frac{1}{80}$ ب) $\frac{1}{40}$ ج) $\frac{1}{30}$ د) $\frac{1}{20}$ ه) $\frac{5}{12}$