

به نام او

## آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

شنبه ۸۷/۶/۹

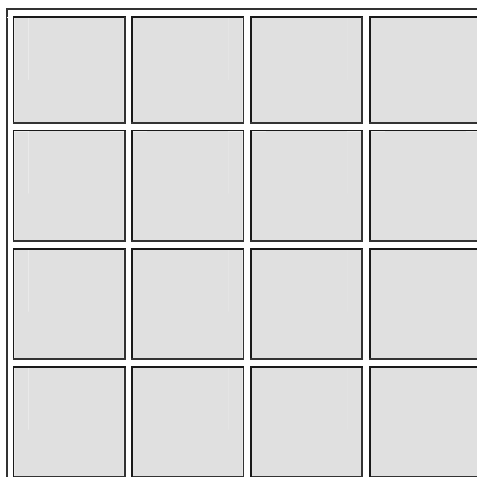
مدت امتحان ۱۰۰ دقیقه

### ۱. دست‌گیری قیصر!

نیروی انتظامی می‌خواهد قیصر، یکی از اراذل و اوباش سابقه‌دار، را دست‌گیر کند. قیصر در یکی از خیابان‌های شهرکی مربعی شکل، شامل  $n$  خیابان عمودی و  $n$  خیابان افقی، متواری است. در دو حالت الف و ب، به چند مأمور نیاز است که در هر صورت قیصر دست‌گیر شود؟



قسمتی از کاریکاتوری از جمال رحمتی



الف. سرعت مأمورین با قیصر برابر است و هر لحظه با ردیابی تلفن همراهش از موقعیت او مطلع می‌شوند.  
ب. سرعت قیصر نامحدود است، تلفن همراهش خاموش است و تا مأموری از کنار او رد نشود اطلاعی از مکان او به دست نمی‌آورد.

توجه کنید که حرکت افراد پیوسته است و هر جا که بخواهند می‌توانند بایستند یا تغییر مسیر دهند.

در هر قسمت اگر موفق به یافتن جواب دقیق نشدید، کران‌های بالا و پایین برای جواب بیابید.

موفق باشید.

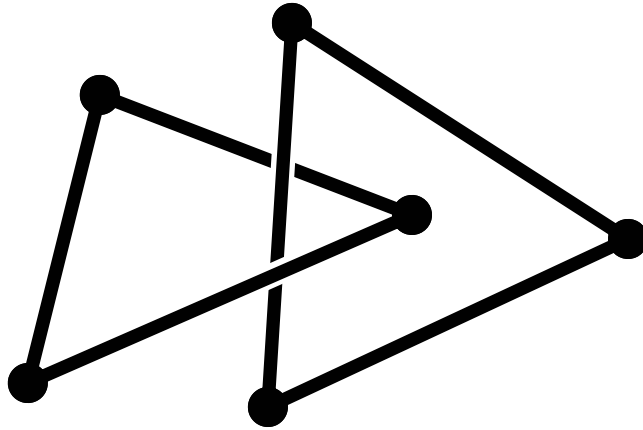
به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

---

شنبه ۸۷/۶/۹  
مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۲. درگیری مثلثانه!

شش نقطه در فضا را دو به دو با پاره‌خط‌های غیرمتقاطع به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید دو مثلث مجزای در هم گیر کرده به وجود آمده است.



موفق باشید.

به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

---

شنبه ۸۷/۶/۹  
مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۳. چندجمله‌ای‌ها

الف. ثابت کنید دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود دارد که هر کدام ضریبی بزرگ‌تر از ۱۳۸۷ داشته باشد ولی ضرایب حاصل ضرب آن‌ها ۰، ۱ یا -۱ باشد.

ب. آیا مضربی از  $x^2 - 3x + 1$  وجود دارد که همه‌ی ضرایب آن ۰، ۱ یا -۱ باشد؟

موفق باشید.

به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

شنبه ۸۷/۶/۹  
مدت امتحان ۶۰ دقیقه

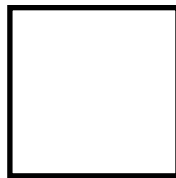
۴. شکل‌های جبری

شکل  $S$  در صفحه را جبری گوییم اگر چندجمله‌ای دو متغیره‌ی  $P$  وجود داشته باشد که مجموعه‌ی صفرهای آن در صفحه، برابر با شکل  $S$  باشد؛ یعنی

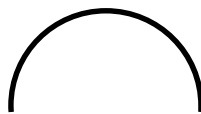
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

مثلاً دایره‌ی به شعاع یک به مرکز مبدأ، یک شکل جبری است، چون نقاط آن دقیقاً صفرهای  $x^2 + y^2 - 1$  هستند.

تعیین کنید که شکل‌های زیر جبری‌اند یا خیر؟



الف. مربع توخالی



ب. نیم‌دایره‌ی بسته

موفق باشید.

به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

یکشنبه ۸۷/۶/۱۰

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۵. بازی «جاده‌ی امن»

الف. فرض کنید  $RBR'B'$  یک چهار ضلعی محدب باشد که رئوس آن را یکی در میان قرمز و آبی کرده‌ایم ( $R$  قرمز است). تعدادی نقطه درون، و نه روی مرز، این چهار ضلعی گذاشته‌ایم با این شرط که با اضافه کردن رئوس چهار ضلعی به آن‌ها هیچ چهار تایی، مگر احتمالاً رئوس چهار ضلعی  $RBR'B'$ ، روی یک دایره نباشند. نقاط داخلی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ می‌کنیم. ثابت کنید دقیقاً یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

○ مسیری در صفحه از  $R$  به  $R'$  موجود است که فاصله‌ی هر نقطه‌ی آن تا نقطه‌ی قرمز اکیداً کم‌تر از فاصله‌ی آن نقطه تا هر نقطه‌ی آبی باشد.

○ مسیری در صفحه از  $B$  به  $B'$  موجود است که فاصله‌ی هر نقطه‌ی آن تا نقطه‌ی آبی اکیداً کم‌تر از فاصله‌ی آن نقطه تا هر نقطه‌ی قرمز باشد.

به این دو نوع مسیر، به ترتیب، «مسیر قرمز» و «مسیر آبی» می‌گوییم.

فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد. دو نفر یکی در میان نقطه‌ی قرمز و نقطه‌ی آبی در درون چهار ضلعی یاد شده در قسمت الف، می‌گذارند به طوری که در هر مرحله، شرط ذکر شده برقرار باشد. بازی زمانی که هر بازی‌کن  $n$  نقطه گذاشت تمام می‌شود. هدف نفر اول این است که در نهایت بتواند مسیری قرمز از  $R$  به  $R'$  ایجاد کند و هدف نفر دوم این است که بتواند در نهایت مسیری آبی از  $B$  به  $B'$  ایجاد کند.

ب. ثابت کنید اگر  $RBR'B'$  مستطیل باشد، به ازای هر  $n$  ای، نفر دوم می‌تواند بازی را ببرد.

ج. سعی کنید برای چهار ضلعی‌های دیگری هم برنده‌ی بازی را مشخص کنید.

موفق باشید.

به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

---

یکشنبه ۸۷/۶/۱۰  
مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۶. تقسیم مریخ

پنج ایست‌گاه تحقیقاتی در حال فعالیت بر روی مریخ هستند. آیا به ازای هر نحوه قرار گرفتن ایست‌گاه‌ها می‌توان سطح مریخ را به پنج ناحیه‌ی یک‌پارچه و هم‌نهشت تقسیم کرد به طوری که هر ناحیه شامل یک ایست‌گاه باشد؟



موفق باشید.

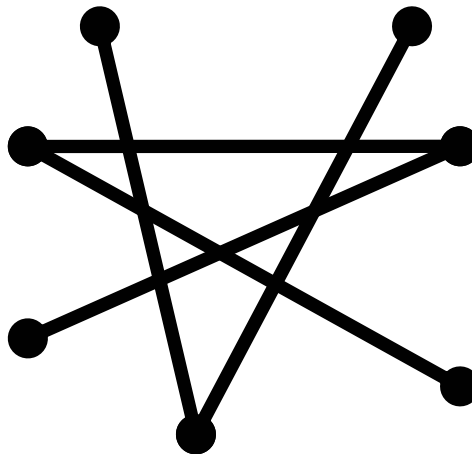
به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

---

یکشنبه ۸۷/۶/۱۰  
مدت امتحان ۱۰۰ دقیقه

۷. گراف‌های «خود متقاطع»

گرافی را «خود متقاطع» گوییم اگر بتوان آن را طوری در صفحه رسم کرد که یال‌های آن پاره‌خط باشد و هر دو یال با هم اشتراک داشته باشند. توجه کنید که هیچ یالی نباید شامل رأسی غیر از رأس‌های انتهایی خودش باشد.



- الف. به ازای چه  $n$  هایی دور به طول  $n$ ، یک گراف خود متقاطع است؟  
ب. ثابت کنید در یک گراف خود متقاطع تعداد یال‌ها بیش‌تر از تعداد رأس‌ها نیست.  
ج. تمام گراف‌های خود متقاطع را مشخص کنید.

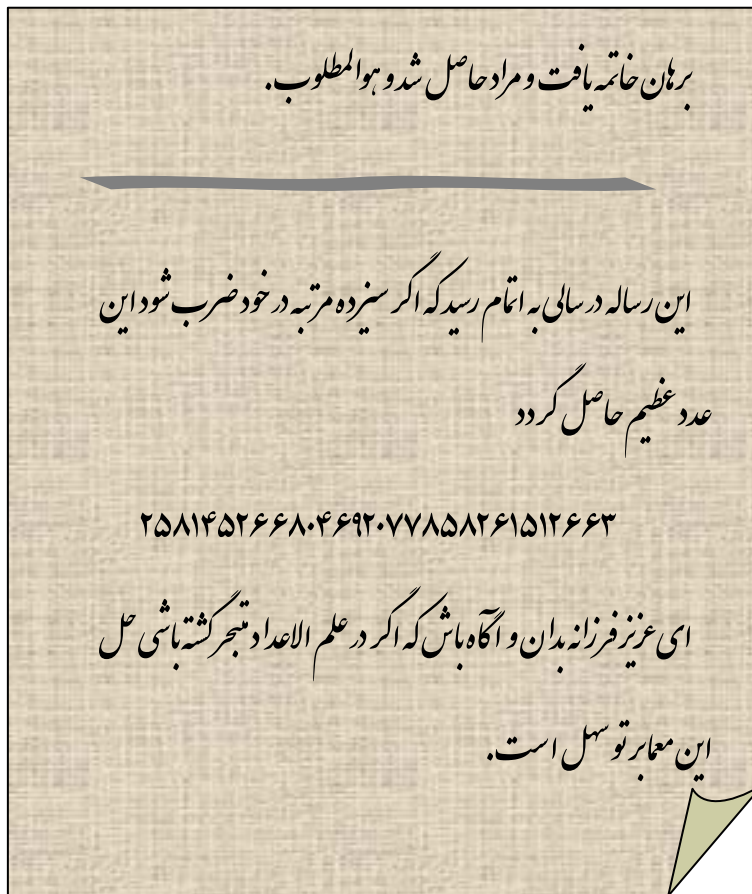
موفق باشید.

به نام او  
آزمون خلاقیت  
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

یکشنبه ۸۷/۶/۱۰  
مدت امتحان ۲۰ دقیقه

۸. نسخه‌ی خطی

در نسخه‌ای خطی از یک رساله‌ی قدیمی ریاضی آمده است:



رساله در چه سالی به پایان رسیده است؟ ثابت کنید!

موفق باشید.