



# آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

## کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعدادی طبیعی باشند که  $ac = ۲۰۱۲$ ، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک  $a$  و  $b$  برابر ۱ و کوچک‌ترین مضرب مشترک  $b$  و  $c$  برابر ۱۳۹۰ است. مقدار  $a + b + c$  چند است؟



۲. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همه بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

۳. مجموع اعداد حقیقی نامنفی  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر ۳۰ است. بیش‌ترین مقدار ممکن  $۳ab + ۴bc$  چه قدر است؟

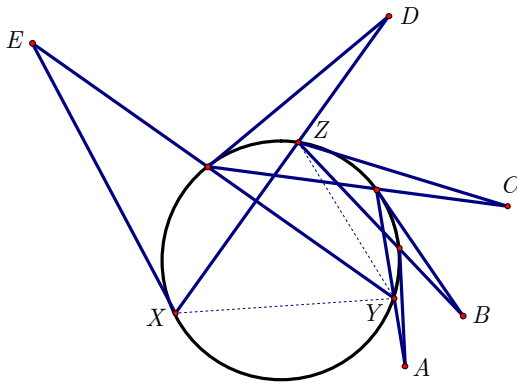
۴. به چند حالت می‌توان در عبارت  $۷ \pm \dots \pm ۲ \pm ۱$  مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

۵. در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نه تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصله بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ‌ها خاموش شده‌اند اما در فاصله کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتا است؟



# آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

## کشور



۶. شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آن‌ها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای  $\hat{A}$ ،  $\hat{B}$ ،  $\hat{C}$ ،  $\hat{D}$  و  $\hat{E}$ ، به ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازه زاویه  $\hat{XYZ}$  را بر حسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)

۷. فرض کنید  $a$  و  $b$  اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت  $a$ ،  $b$  و  $ab$ ، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد  $b^2$  چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول  $4 \times 4$  قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹. در مثلث  $ABC$  داریم  $\angle BAC = 60^\circ$ ،  $AB = 7\sqrt{3}$  و  $AC = 14\sqrt{3}$ . نقطه متغیر  $X$  را روی پاره‌خط  $BC$  در نظر می‌گیریم. از نقطه  $X$  دو خط به موازات  $AB$  و  $AC$  رسم می‌کنیم تا به ترتیب  $AB$  و  $AC$  را در نقاط  $Y$  و  $Z$  قطع کنند. طول پاره‌خط  $BX$  چه قدر باشد تا پاره‌خط  $YZ$  کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

۱۰. چند جمله‌ای  $P(x)$  برابر است با مجموع  $x^n$ ‌هایی که  $1 \leq n \leq 120$  و  $n$  بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چند جمله‌ای چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟



# آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

## کشور

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج گزینه‌ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱. یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعده  $۶ \times ۴$  روی زمین قرار دارد. نقطه  $A$  روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می‌غلطانیم و این کار را در همان جهت آن قدر ادامه می‌دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطه  $A$  چه مسافتی را در فضای طی کرده است؟

- الف)  $۳\pi$       ب)  $۴\pi$       ج)  $۶\pi$       د)  $۸\pi$       ه)  $۱۲\pi$

۲. سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در نظر بگیرید. کدامیک از گزینه‌ها، برابر مجموعه اعضایی است که دست کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

- الف)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$       ب)  $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$   
 ج)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$       د)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$   
 ه) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

۳. به چند روش می‌توان مجموعه  $\{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$  را دو قسمت کرد که حاصل ضرب اعضای آن‌ها با یکدیگر برابر باشد؟

- الف) این کار ممکن نیست.      ب) بین ۱ و ۱۰ روش  
 ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش  
 د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش      ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

۴. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  $ABC$  به زاویه رأس  $A$  و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطه دل‌خواه  $D$  در صفحه مفروض است به طوری که، نقطه  $A$  داخل مثلث  $BCD$  قرار می‌گیرد. نیم‌سازهای داخلی زوایای  $\angle BAD$  و  $\angle CAD$  را رسم می‌کنیم تا اضلاع  $BD$  و  $CD$  را به ترتیب، در نقاط  $E$  و  $F$  قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث  $BCD$  واقع بر پاره‌خط  $EF$  باشد، طول پاره‌خط  $AD$  چه قدر است؟

- الف) ۱۰      ب) ۱۵      ج) ۲۰      د) ۳۰      ه) بستگی به مکان  $D$  دارد.

۵. چندجمله‌ای  $x^4 - x^2 - 2x - 1$  را در نظر بگیرید. مجموعه  $x$ ‌هایی که به ازای آن‌ها این چندجمله‌ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

- الف) یک پاره‌خط      ب) دو پاره‌خط  
 ج) یک پاره‌خط و یک نیم‌خط  
 د) یک پاره‌خط و دو نیم‌خط      ه) دو نیم‌خط



# آزمون مرحله اول سی امین المپیاد ریاضی

## کشور

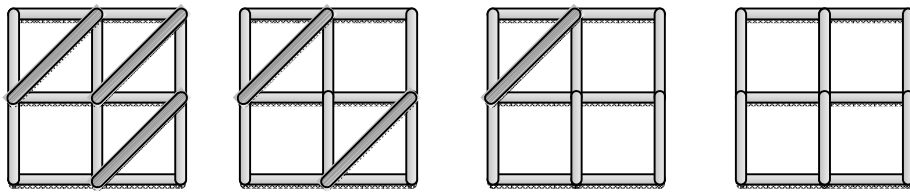
۶. به چند طریق می توان دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر

$$\frac{a+b}{a-b}$$

عددی طبیعی باشد؟

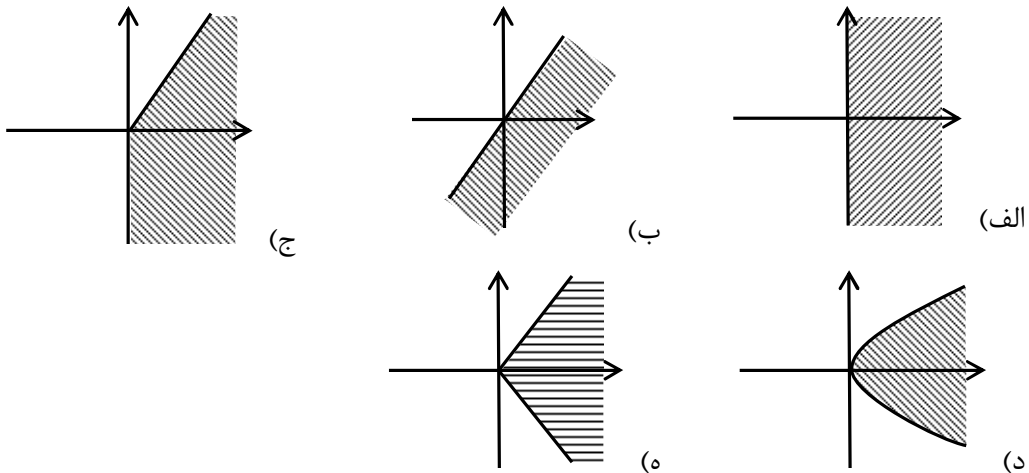
- الف) ۱۹ (ب) ۲۴ (ج) ۲۸ (د) ۲۹ (ه) ۳۴

۷. فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه چوبی به طول های یک متر و  $\sqrt{2}$  متر چهار شکل زیر را ساخته ایم به طوری که قطعات می توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل ها می توانند با حرکت قطعه چوبها تغییر شکل دهند؟

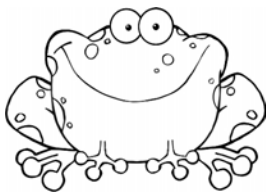


- الف) هیچ کدام (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۸. مجموعه نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل  $(x^2 + y^2, xy)$  هستند، که  $x$  و  $y$  اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکلها تقریبی هستند.)



۹. یک وزغ و یک ملخ در فاصله ۲ متری یکدیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی متر به سمت وزغ می پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می خورد و می ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟



- الف) ۸ (ب) ۱۷ (ج) ۱۸ (د) ۲۴ (ه) ۳۲



# آزمون مرحله اول سی‌امین المپیاد ریاضی

## کشور

۱۰. فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) بی‌نهایت (ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد حقیقی  $a$  که برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  که  $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$  و  $x > 0$  داشته باشیم  $ax < y$ ، کدام است؟

- (الف)  $-\sqrt[3]{8}$  (ب)  $-4$  (ج)  $0$  (د)  $4$  (ه)  $\sqrt[3]{8}$

۱۲. به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را انتخاب کرد که  $xy + yz + zx = xyz$ ؟

- (الف) ۷ (ب) ۴ (ج) ۲ (د) ۱ (ه) ممکن نیست.



۱۳. رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیم‌رو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامه هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

- (الف) ۷۸ (ب) ۸۴ (ج) ۱۲۶ (د) ۱۶۸ (ه) ۱۹۲

۱۴. چند زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases}$$

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۱۵. فرض کنید چهارضلعی محدب  $ABCD$  محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

- (الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا (ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا (ج) گاهی یکی و گاهی دو تا (د) همواره دو تا (ه) همواره یکی