

به نام او

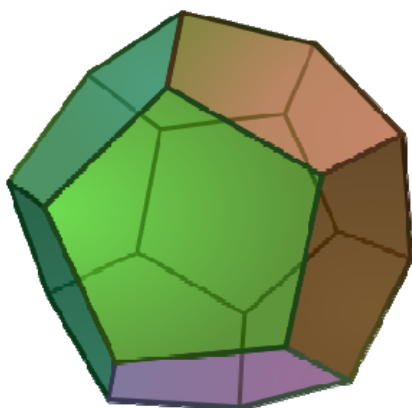
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

یکشنبه ۱۳۹۰/۶/۲۰

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۱. دوازده وجهی منتظم



دوازده وجهی منتظم یک چند وجهی محدب است که وجوه آن پنج ضلعی منتظم‌اند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود دوازده وجهی منتظم بیست رأس دارد و از هر رأس سه ضلع خارج می‌شود.

فرض کنید ده رأس از بیست رأس یک دوازده وجهی منتظم را علامت زده‌ایم.

الف) نشان دهید می‌توان دوازده وجهی را با یک دوران بر مکان قبلی خود منطبق کرد طوری که حداکثر چهار رأس علامت‌دار در جایی قرار گیرند که قبلاً هم رأس علامت‌داری در آن مکان قرار داشته است.

ب) نشان دهید عدد چهار در قسمت قبل قابل تعویض با عدد سه نیست.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

یکشنبه ۱۳۹۰/۶/۲۰

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۲. چندجمله‌ای‌های ریش‌ریش!

الف) ثابت کنید برای هر k و n طبیعی، چندجمله‌ای‌های تکین درجه n ، با ضرایب صحیح مانند $P_1(x), \dots, P_k(x)$ وجود دارند که هیچ دوتایی عامل مشترک نداشته باشند و جمع هر چند تا از آنها تمام ریشه‌هایش حقیقی باشد.

ب) آیا نامتناهی چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح مانند $P_1(x), P_2(x), \dots$ وجود دارد که هیچ دوتایی عامل مشترک نداشته باشند و جمع هر تعداد متناهی از آنها تمام ریشه‌هایش حقیقی باشد؟

موفق باشید.

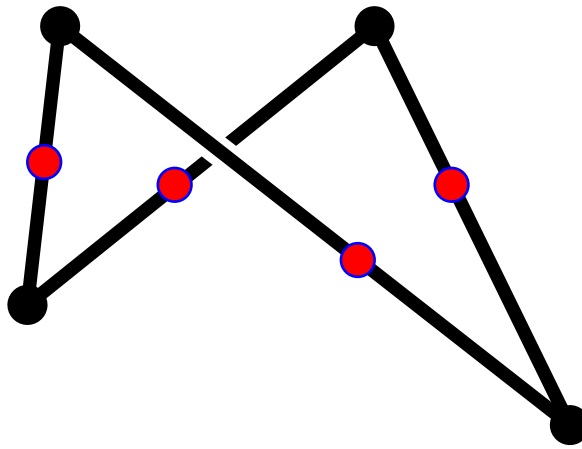
به نام او
آزمون خلاقیت
دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

یکشنبه ۹۰/۶/۲۰

مدت امتحان ۴۵ دقیقه

۳. چهارضلعی لق

چهار میله فلزی طوری به هم متصل شده‌اند که اولاً تشکیل یک چهارضلعی در فضا را داده‌اند و ثانیاً زاویه دو میله متصل آزادانه قابل تغییر است.



در حالتی که چهارضلعی کاملاً در یک صفحه نیست روی هر ضلع چهارضلعی نقطه‌ای را علامت می‌زنیم به نحوی که این چهار نقطه روی یک صفحه باشند. ثابت کنید با لق خوردن چهارضلعی، چهار نقطه علامت‌زده شده همیشه هم‌صفحه باقی می‌مانند.

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

دوشنبه ۹۰/۶/۲۱

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۴. پله برقی هوشمند

پله برقی ایستگاه «جوان مرد قصاب» دارای این خاصیت است که اگر m نفر سوار آن باشند سرعت آن $m^{-\alpha}$ است که α عددی حقیقی، مثبت و ثابت است.

فرض کنید n نفر می‌خواهند از پله بالا روند و عرض پله‌ها به قدری است که همه می‌توانند هم‌زمان روی یک پله بایستند. اگر طول پله برقی l باشد کوتاه‌ترین زمان لازم برای این که همه n نفر به بالای پله برقی برسند چه قدر است؟ چرا؟



موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

دوشنبه ۹۰/۶/۲۱

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۵. اعداد اول طلایی

فرض کنید α عددی حقیقی باشد و $a_1 < a_2 < \dots$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد که برای هر عدد طبیعی n داریم $a_n \leq n^\alpha$. عدد اول q را طلایی می‌نامیم اگر عدد طبیعی m وجود داشته باشد که $q \mid a_m$. فرض کنید $q_1 < q_2 < q_3 < \dots$ همه اعداد طلایی دنباله $\{a_n\}$ باشند.

الف) ثابت کنید اگر $\alpha = 1/5$ ، آن‌گاه $q_n \leq 139 \cdot n$. آیا می‌توانید کران به‌تری برای q_n بیابید؟

ب) ثابت کنید اگر $\alpha = 2/4$ ، آن‌گاه $q_n \leq 139 \cdot 2^n$. آیا می‌توانید کران به‌تری برای q_n بیابید؟

موفق باشید.

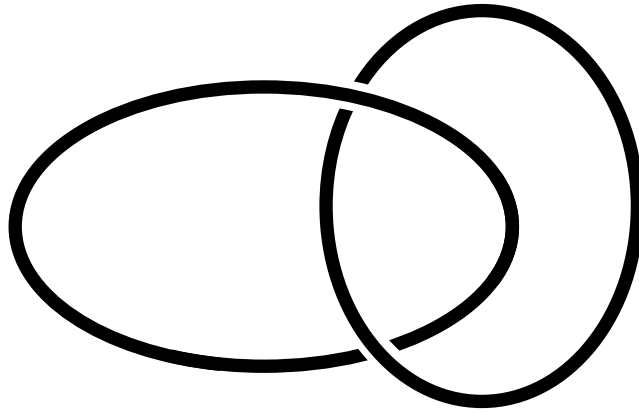
به نام او
آزمون خلاقیت
دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

دوشنبه ۹۰/۶/۲۱

مدت امتحان ۴۵ دقیقه

۶. دواير درگير

دو دایره در فضا را درگیر می‌گوییم هرگاه متقاطع باشند و یا در هم گیر کرده باشند.



در مورد چهار نقطه متمایز A, B, A', B' در فضا یک شرط لازم و کافی «مفید» بیابید برای این که هر دایره گذرنده از زوج A, B و هر دایره گذرنده از زوج A', B' درگیر باشند.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

سه‌شنبه ۹۰/۶/۲۲

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۷. تابع پیش‌گو

تابع $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ و زیرمجموعه A از \mathbb{N} را در نظر بگیرید. تابع f را A -پیش‌گو می‌گوییم اگر مجموعه $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A, f(A \cup \{x\}) \neq x\}$ متناهی باشد. نشان دهید تابعی وجود دارد که برای هر زیرمجموعه A از اعداد طبیعی، A -پیش‌گو باشد. راه‌نمایی: ابتدا سعی کنید تابعی ارائه کنید که برای زیرمجموعه‌های متناهی پیش‌گو باشد.

(با این تابع می‌توان شعبده‌بازی غریبی ترتیب داد به این طریق که از فردی می‌خواهیم زیرمجموعه ثابتی از اعداد طبیعی انتخاب کند و سپس یک عدد به آن اضافه کند و مجموعه حاصل را به ما بگوید. ما با اعمال این تابع روی مجموعه‌ای که به ما داده است، عدد اضافه شده را تقریباً همیشه، یعنی حداکثر به ازای متناهی اشتباه برای هر A ، اعلام می‌کنیم!)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

سه‌شنبه ۹۰/۶/۲۲

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۸. دنباله‌های پوشاننده

دنباله d_1, \dots, d_n از اعداد طبیعی، نه لزوماً متمایز، را پوشاننده گوییم هرگاه تصاعدهایی با قدر نسبت‌های d_1, \dots, d_n وجود داشته باشند که هر عدد طبیعی در دست‌کم یکی از آن‌ها آمده باشد. این دنباله را کوتاه می‌نامیم هرگاه نتوان هیچ یک از d_1, \dots, d_n را حذف کرد که دنباله حاصل همچنان پوشاننده بماند.

الف) d_1, \dots, d_n را یک دنباله پوشاننده کوتاه بگیرد و فرض کنید اعداد طبیعی را با تصاعدهایی با قدر نسبت d_1, \dots, d_n و عضو ابتدایی a_1, \dots, a_n پوشانده باشیم. هم‌چنین p را یک عدد اول بگیرد که d_1, \dots, d_k را می‌شمارد اما d_{k+1}, \dots, d_n را نمی‌شمارد. ثابت کنید باقی‌مانده‌های a_1, \dots, a_k بر p ، تمام اعداد $1, \dots, p-1$ را شامل می‌شوند.

ب) در مورد دنباله‌های پوشاننده و هم‌چنین دنباله‌های پوشاننده کوتاه در حالتی که هر یک از d_1, \dots, d_n تنها یک عامل اول داشته باشد هر چه می‌توانید ثابت کنید.

موفق باشید.