

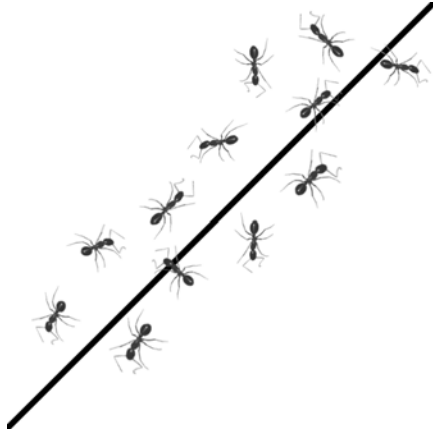
به نام او

## مرحله دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز اول

پنجشنبه، ۸ اردیبهشت ۱۳۹۰



(۱) ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصله سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصله سر هر دو مورچه بیشتر از دو سانتی‌متر باشد فاصله سر دست‌کم دو مورچه بیشتر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)

(۲) در مثلث  $ABC$  داریم  $\widehat{ABC} = 6^\circ$ . از رأس  $B$  عمودی بر ضلع  $AC$  رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه  $\widehat{BAC}$  را در نقطه  $D$  قطع کند. هم‌چنین از رأس  $C$  عمودی بر ضلع  $AB$  رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه  $\widehat{ACB}$  را در نقطه  $E$  قطع کند. ثابت کنید  $\widehat{BED} \leq 3^\circ$ .

(۳) همه دنباله‌های صعودی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر  $i, j \in \mathbb{N}$ ، تعداد مقسوم‌علیه‌های  $i + j$  با تعداد مقسوم‌علیه‌های  $a_i + a_j$  برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر  $i \leq j$  آن‌گاه  $a_i \leq a_j$ ).

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

## مرحله دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۹ اردیبهشت ۱۳۹۰

روز دوم

زمان: چهار ساعت و نیم

۴) کوچکترین عدد طبیعی  $n$  را بیابید که  $n$  عدد حقیقی در بازه  $(-1, 1)$  وجود داشته باشند که مجموع آنها صفر و مجموع مربعهای آنها  $20$  باشد.



۵) رنگین کمان نام پرندهای کمیاب است. این پرنده زیبا می‌تواند به  $n$  رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانش‌مندان حقیقت جدیدی درباره این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای  $i$ ام،  $j$ ام،  $k$ ام و  $l$ ام، که  $i < j < k < l$  و این پرنده در روزهای  $i$ ام و  $k$ ام هم‌رنگ باشد و در روزهای  $j$ ام و  $l$ ام نیز هم‌رنگ و به رنگی متفاوت از روزهای  $i$ ام و  $k$ ام باشد. حداکثر طول عمر این پرنده بر حسب  $n$  چند روز است؟

۶) اضلاع  $AB$  و  $AC$  از مثلث  $ABC$  را به ترتیب از طرف  $B$  و  $C$  امتداد داده‌ایم تا خط داده شده  $l$  را به ترتیب در نقاط  $D$  و  $E$  قطع کنند. فرض کنید قرینه  $l$  نسبت به عمود منصف  $BC$  نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط  $D'$  و  $E'$  قطع کند. ثابت کنید اگر  $BD + CE = DE$  آن‌گاه  $BD' + CE' = D'E'$ .

بارم هر سؤال ۷ نمره است.