



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید. جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی $۶۹۵۰/۷۳$ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳
--	--	--	--	---

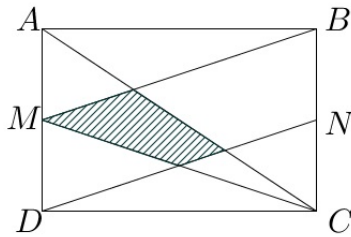
لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. سینا می‌خواهد برای دوره کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

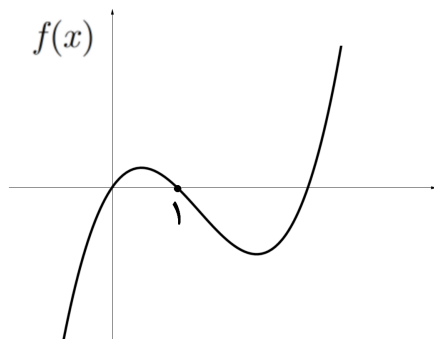
۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = 6$ و $x^2 + y^2 = 40$ مقدار $x^6 + y^6$ چه قدر است؟



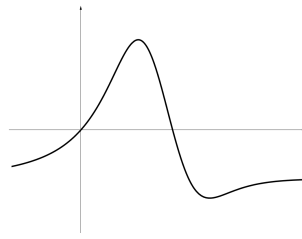
آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



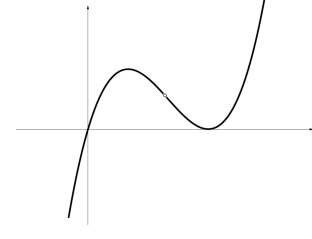
۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟



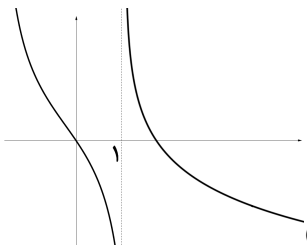
۴. فرض کنید نمودار تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل رو به رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند.)



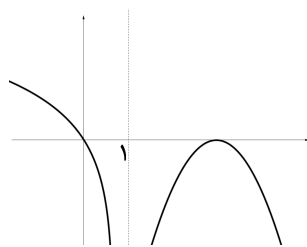
(۲)



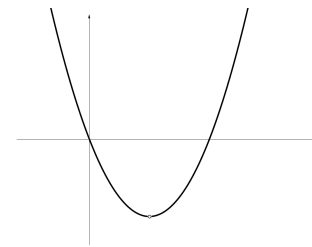
(۱)



(۵)



(۴)



(۳)

۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه حداقل سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶ (۵) بی‌نهایت

۶. در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های \widehat{BAD} ، \widehat{CAD} و \widehat{ABC} با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۵) $\frac{\sqrt{6}}{2}$



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۷. دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

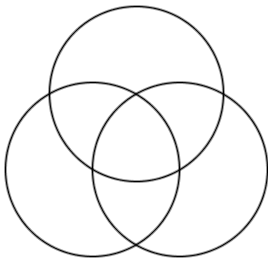
رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹ (۵)

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{2^2}}$$

- ۱ (۱) $a < b < c$ ۲ (۲) $b < a < c$ ۳ (۳) $c < a < b$ ۴ (۴) $b < c < a$ ۵ (۵) $a < c < b$



۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟

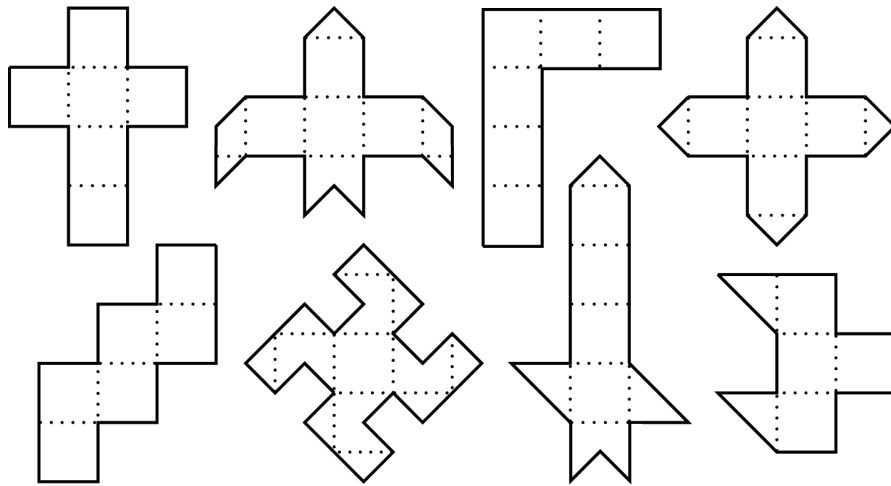
۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $288, 524 = 2^{19}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه به زاهدان انتخاب شده و در نقطه وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

۱۱. ((ضربین حساب))، ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 3^{1435} \times 2^{1014}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $9 \times 9 \times 9 = 729$).

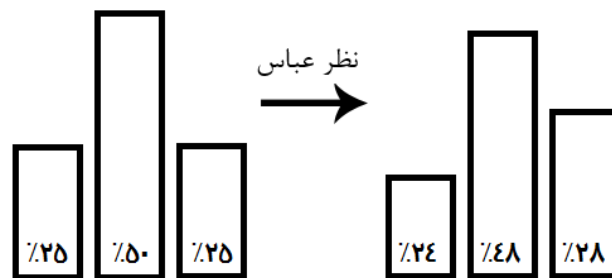


آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از ((خیلی خوب بود.)), ((عالی بود.)) و ((به‌تر از این نمی‌شد.))! پیش از این که عباس نظر خود را در وب‌گاه ثبت کند، درصد این گزینه‌ها به ترتیب برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است. پس از ثبت نظر او این نسبت به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تغییر می‌کند. تعداد نظرهای ثبت شده پیش از ثبت نظر عباس چه قدر بوده است؟ (درصدها دقیق هستند.)



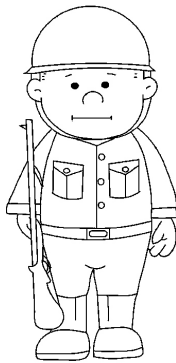
۱۴. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

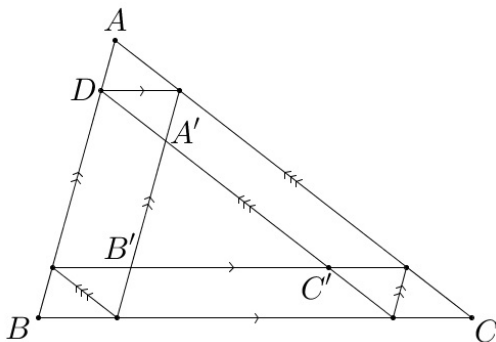
۱۵. کوچکترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

۱۶. چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همه قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟



۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)

۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟



۱۹. مجموعه S را مجموعه همه اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

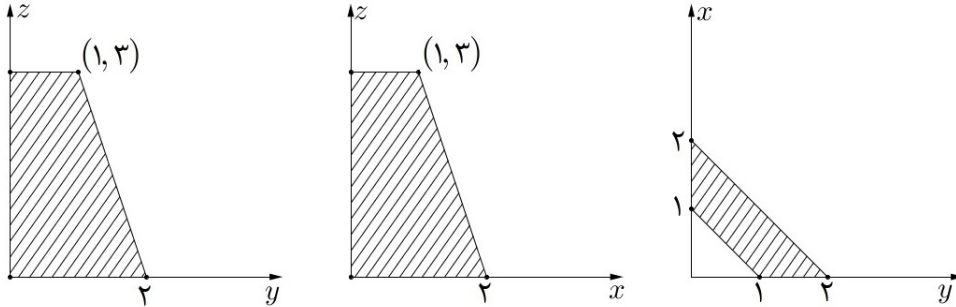
$$a(a-1) + x(x-1) + y(y-1) = \frac{3}{4}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه قدر است؟



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

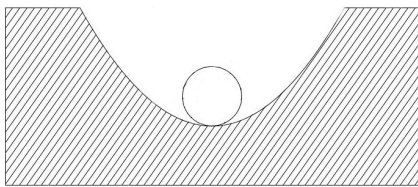
۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل های زیر است. مجموع مربع های طول قطرهای این چهارضلعی چه قدر است؟



۲۱. چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 & 9 \quad (3) & 5 \quad (2) & 1 \quad (1) \\ yz + zt + ty = x^2 & & 5 \text{ بی نهایت} & 25 \quad (4) \\ zt + tx + xz = y^2 & & & \\ tx + xy + yt = z^2 & & & \end{cases}$$

۲۲. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی و سطح مقطع لوله به شکل یک دایره است. (منظور از سهمی نمودار یک چندجمله ای درجه دوم است.) اگر عرض کانال برابر ۲ متر و عمق آن ۴ متر باشد، شعاع بزرگترین لوله ای که می توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی متر است؟ (نسبت اندازه ها در شکل صحیح نیست.)

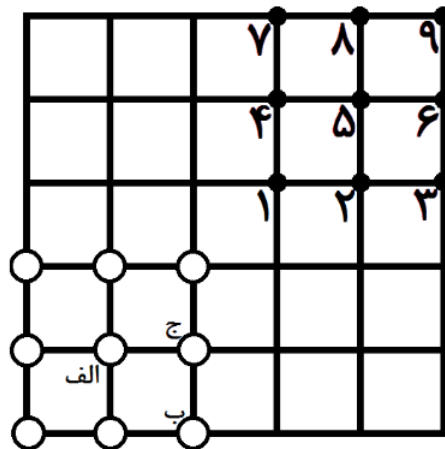




آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۳. طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطه D برخورد می‌کند. طول AD چه قدر است؟

۲۴. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توپر نمایش داده شده ببرد، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟

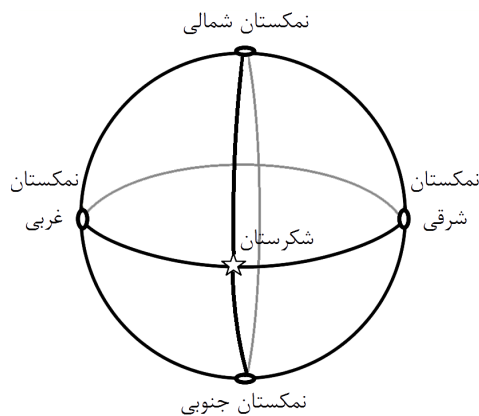


(۱) ۲، ۳، ۵ (۲) ۸، ۷، ۵ (۳) ۸، ۷، ۹ (۴) ۴، ۷، ۵ (۵) نمی‌توان تعیین کرد.



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۵. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیۀ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیۀ، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ شهر همسایه به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟



از	شکرستان	نمکستان شرقی	نمکستان غربی	نمکستان شمالی	نمکستان جنوبی
شکرستان	×	۳	۱	۰	۲
نمکستان شرقی	۰	×	۲	۰	۱
نمکستان غربی	۱	۰	×	۳	۰
نمکستان شمالی	۲	۰	۱	×	۱
نمکستان جنوبی	۲	۰	۰	۲	×

(۳) نمکستان غربی

(۲) نمکستان شرقی

(۱) شکرستان

(۵) نمکستان جنوبی

(۴) نمکستان شمالی