



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش پژوهان جوان

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

معاونت دانش پژوهان جوان

«امام خمینی (ره)»

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست.

دفترچه سؤالات مرحله اول

سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۵

ساعت: ۰۹:۰۰ صبح

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات	مدت آزمون
۳۰	۲۱۰ دقیقه

نام:

نام خانوادگی:

شماره صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخنامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخنامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخنامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخنامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخنامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به‌علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- ۶- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و سوّم متوسطه انتخاب می‌شوند.
- ۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخنامه تحویل داده شود).
- ۹- نشانی وب‌گاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و ۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) ۱۰

۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = 90^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D ، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطه E و M قطع کند که نقطه E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و همچنین نسبت طول کمان‌های \widehat{DE} به \widehat{EM} به \widehat{MF} برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدرمطلق تقاضل دو زاویه حاده مثلث ABC چه قدر است؟

- (۱) 70° (۲) 50° (۳) 45° (۴) 30° (۵) 10°



۳. جناب خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کم‌تر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفته اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود).

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹ (۵) ۱۶

۴. تابع $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m, n) = 1$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n+1}$$

که منظور از (m, n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره تابع f درست است؟

- (۱) تابع f یک‌به‌یک است. (۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.
 (۳) برد تابع f تمام اعداد گویا است. (۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$.
 (۵) همه گزینه‌ها صحیح هستند.



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور

۵. چند عدد سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟
 (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار

۶. با استفاده از همه ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟
 (۱) ۳۴۵ (۲) ۱۹۸ (۳) ۹۱۲ (۴) ۳۹۸ (۵) ۳۱۲

۷. برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ (\mathbb{Q}' نماد مجموعه اعداد گنگ است).

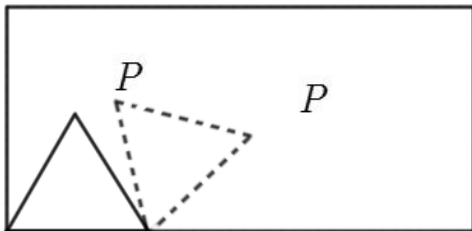
• $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$

• $\{\sqrt{2}, 5\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$

• $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

• $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$

(۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک (۵) صفر



۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل 2×4 ، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P ، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟

(۱) $\frac{10\pi}{3}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) $\frac{7\pi}{3}$ (۵) 2π

۹. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش پذیر باشد؟

(۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۲ (۵) ۱۵۶



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور

۱۰. اعداد ۱، ۲، ... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۴۱ (۳) ۶۹۸ (۴) ۷۰۱ (۵) ۷۰۳

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x + y}{1 - xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) -8 (۴) $\frac{8}{3}$ (۵) -2

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b, c) = b(c, a) = c(a, b) = 2^6 \times 3^8 \times 5^{10}$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

- (۱) ۳۲۴۰ (۲) ۲۰۸۰ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۱۶۲۰ (۵) ۷۲۰

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳، عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

- (۱) ۳۶ (۲) ۱۴۴ (۳) ۳۲۴ (۴) ۹۲۴ (۵) ۷۴۸۴۴۰۰

۱۴. a, b, c اعدادی دو به دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌های مشترک دارند.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad bx^2 + cx + a = 0, \quad cx^2 + ax + b = 0.$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (۳) -1 (۴) ۱ (۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

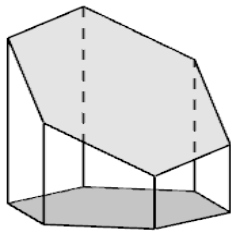
المپیاد ریاضی کشور

۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبه دیگر برابر باشد. در حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

- (۱) ۵۰ و ۹۰ (۲) ۵۰ و ۱۰۰ (۳) ۸۰ و ۹۰ (۴) ۸۰ و ۱۰۰ (۵) ۹۰ و ۱۰۰

۱۶. چند زوج مرتب (m, n) از اعداد طبیعی داریم که $[1, 2, \dots, m] = 1395 \times [1, 2, \dots, n]$. (منظور از نماد $[1, 2, \dots, m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1, 2, \dots, m$ است.)

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار



۱۷. یک منشور قائم با قاعده شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصله رئوس این سطح مقطع تا قاعده پایین به ترتیب برابر ۲، ۳، x ، y ، ۱۱ و z باشد $x + y + z$ چه قدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵) ۲۶



۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آن که تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۵۰۰۰۰۰ (۵) ۵۲۴۲۸۸

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

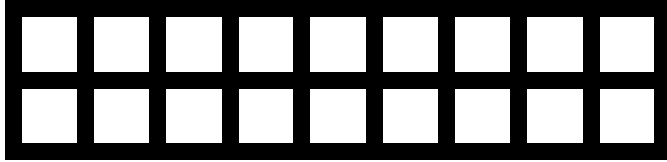
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ 2x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

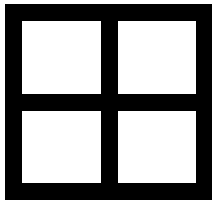
المپیاد ریاضی کشور



۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همه تقاطع‌ها سرکشی کند به طوری

که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۵ (۳) 2×3^4 (۴) 2^4 (۵) $3^6 - 3^5$



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

- (۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیش‌تر از تقاطع‌های دیگر است.
 (۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
 (۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
 (۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست‌کم ۹ خودرو پارک شده است.
 (۵) گزینه‌های ۱ و ۴.



۲۲. در مسابقه قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همه وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنه ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را

در آن‌جا قرار داده و از آن خانه وزنه ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن‌جا قرار می‌دهد، سپس از آن‌جا وزنه ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آن که وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آن‌جا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

- (۱) ۲۰۲۸۰ (۲) ۲۰۲۰۰ (۳) ۲۰۱۸۰ (۴) ۲۰۱۰۰ (۵) ۲۰۰۸۰



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید w_b و w_c به ترتیب دو دایره گذرنده از A باشند به طوری که به ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایره مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = 8$ و $AN = 6$ ، حاصل $NE \times NF$ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۸۱ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۵۰ (۵) ۲۰۰

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = 60^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = 2AE$ ، به علاوه F را هم قرینه E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۵) $\frac{1}{6}$

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e :

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 \geq k(b-d)^2$$

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۲ (۵) $\frac{5}{6}$

۲۶. برای زیرمجموعه ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > 0$ ، مجموعه نقاطی که از دست کم یک نقطه A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نمایش می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همه موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

• $(A_r)_s = (A_s)_r$

• اگر $A \subset B_r$ و تنها اگر $B \subset A_r$

• اگر برای هر $t > 0$ ، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$

• $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$

• اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار (۵) پنج



آزمون مرحله اول سی و پنجمین دوره

المپیاد ریاضی کشور

۲۷. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 2\hat{C}$. عمودمنصف ضلع BC در نقطه D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطه F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = 4$ ، شعاع دایره چه قدر می‌شود؟

(۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $3 - \sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$ (۵) $2\sqrt{6}$

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x + y + z = 222$ و $xy + yz + zx = 12321$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

(۱) ۵۴۷۶ (۲) ۴۱۰۷ (۳) ۲۴۱۲ (۴) ۱۶۰۲ (۵) ۱۳۶۹

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هرگاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A ، باقی‌مانده تقسیم $a + b + 1$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعه تقریباً جمعی وجود دارد؟

(۱) ۴۹ (۲) ۹۹ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۵ (۵) ۲۰۰

۳۰. وترهای AB و CD از دایره W ، در نقطه P خارج از دایره متقاطع‌اند که بین A و B و C و D بین P و D است. می‌دانیم $AB = 3AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{3}$ باشد، مقدار

$\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه قدر است؟

(۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۵) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

قابل توجه دانش‌آموزان سال دهمی: کمیته علمی المپیاد ریاضی در تلاش است، به عنوان جایزه‌ای علمی، تعدادی مدرسه کوتاه تابستانی برای رتبه‌های برتر دانش‌آموزان سال دهم برگزار کند که با ریاضیات زیبا و هنر حل مسأله بیش‌تر آشنا شوند. جامعه هدف اصلی این برنامه، دانش‌آموزانی هستند که نمرات آن‌ها نزدیک مرز قبولی در مرحله دوم است ولی مدارس محل تحصیل آن‌ها در سال‌های گذشته موفقیت کم‌تری در المپیاد ریاضی داشته‌اند تا بدین‌وسیله المپیاد ریاضی گسترش یافته و اثرگذاری بیش‌تری در رشد ریاضیات کشور پیدا کند. امیدواریم در صورت فراهم شدن شرایط، بتوانیم اولین دوره این مدارس کوتاه را در تابستان سال ۱۳۹۶ اجرا کنیم.

