



آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

ریاضی کشور

دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخی ۶۹۵۰۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

۰. (سؤال شماره صفر!) کد سؤالات شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخ‌نامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده شده است.

۱. در روستایی با هزار نفر جمعیت، دویست نفر مبتلا به نوعی بیماری شده‌اند. با انجام یک آزمایش می‌توان بیماری را تشخیص داد ولی نتیجه خطا دارد، به این معنی که فرد بیمار را به احتمال ۵ درصد سالم و فرد سالم را به احتمال ۵ درصد بیمار اعلام می‌کند. فردی را به تصادف از مردم این روستا انتخاب کرده و از او آزمایش می‌گیریم. چند درصد احتمال دارد آن فرد بیمار اعلام شود؟

۲. کارخانه‌ای محصولاتش را در بسته‌هایی مکعبی بسته‌بندی می‌کند و در انبار هر ۵۱۲ بسته را به شکل مکعبی $۸ \times ۸ \times ۸$ به هم متصل می‌کنند. در شرایطی که دمای هوا از حدی بیش‌تر شود لازم است با جدا کردن این مجموعه ۵۱۲ تایی با صفحات افقی و عمودی، هر بسته دست‌کم یک وجه داشته باشد که با وجوه بسته‌های دیگر در تماس نباشد. کم‌ترین تعداد صفحه برای رسیدن به چنین وضعیتی چند تا است؟

۳. چند عدد هشت‌رقمی در مبنای چهار با ارقام ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۴. پنج نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی هم‌خط نیستند. همه پاره‌خط‌هایی که رئوسشان این نقاط است را رسم کرده‌ایم. حداقل چند نقطه جدید در محل تقاطع پاره‌خط‌ها به وجود می‌آید؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) ۵



آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

ریاضی کشور

۵. دور گود یک زورخانه ۱۲۸ صندلی، دایره‌وار، چیده شده است. تماشای اولی که وارد زورخانه می‌شود روی صندلی شماره یک می‌نشیند. از آنجا که سرماخوردگی در شهر شایع شده، هر فردی که وارد می‌شود روی صندلی‌ای می‌نشیند که فاصله‌اش با نزدیک‌ترین صندلی اشغال‌شده بیش‌ترین مقدار ممکن باشد و اگر چند صندلی با این خاصیت وجود داشت آن‌که شماره‌اش کم‌تر است را انتخاب می‌کند. نفر ۳۹ روی کدام صندلی می‌نشیند؟

۶. عددی طبیعی n ، کوچک‌ترین عددی است که باقی‌مانده $۳n + ۴۵$ بر ۱۰۶۰ برابر ۱۶ است. باقی‌مانده $۱۸n + ۱۷$ بر ۱۹۲۰ چند است؟

۷. مساحت محصور بین نمودار تابع $y = [1 \cdot x] + \sqrt{1 - x^2}$ در بازه $[0, 1]$ و محور طول‌ها چه قدر است؟ (منظور از $[t]$ ، جزء صحیح عدد t است.)

۸. شماره اصلی پلاک یک خودرو متشکل از یک عدد دو رقمی در سمت چپ، یکی از حروف الفبا در وسط و یک عدد سه رقمی در سمت راست است و از رقم صفر در این دو عدد استفاده نمی‌شود. به هر پلاک، ضرب دو عدد مورد اشاره را نسبت می‌دهیم. مثلاً به پلاک زیر عدد $۴۳۸۰ = ۱۲ \times ۳۶۵$ را نسبت می‌دهیم.



میانگین اعداد نسبت‌داده‌شده به تمام پلاک‌های ممکن، چند است؟

۹. قسمتی از پارک جنگلی لتیان که بین دو جاده واقع شده، آتش گرفته است. آتش با سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت گسترش می‌یابد. اگر فاصله نقطه شروع آتش‌سوزی تا هر دو جاده ۱۰ کیلومتر باشد، پس از ۲ ساعت مساحت ناحیه سوخته‌شده چند کیلومتر مربع است؟ (جاده‌ها را خط‌های طولانی، راست و موازی با هم بگیرید و فرض کنید آتش از جاده عبور نمی‌کند.)

$$(۱) \quad ۲۰۰\sqrt{۳} \quad (۲) \quad ۱۰۰\sqrt{۳} \quad (۳) \quad ۴۰۰\sqrt{۳} + ۴۰۰\frac{\pi}{۳} \quad (۴) \quad ۲۰۰\sqrt{۳} + ۴۰۰\frac{\pi}{۳} \quad (۵) \quad ۴۰۰\sqrt{۳}$$

۱۰. مثلث ABC را در نظر بگیرید که $AB = AC = ۱۵$ و $BC = ۱۸$. نقاط D و E را به ترتیب روی CA و CB طوری بگیرید که $CD = ۵$ و $CE = ۳$. نقطه F را روی نیم‌خط \overrightarrow{DE} طوری در نظر بگیرید که $EF = ۸$. نقطه M را وسط AB و N را نقطه برخورد FM با BC بگیرید. طول CN چه قدر است؟



آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۱. طبق ضوابط، ساختمان‌های یک کوچه نباید بیش از ۹ طبقه داشته باشند. به علاوه اگر تعداد طبقات دو ساختمان، با هر چه قدر فاصله، برابر باشد، حتماً باید ساختمانی با تعداد طبقات بیش‌تر از آن دو بین‌شان وجود داشته باشد. حداکثر چند ساختمان در یک سمت کوچه می‌توان ساخت؟



۱۲. چند سه تایی (a, b, c) از اعداد طبیعی اکیداً کم‌تر از ۵۱ داریم که $a + b + c$ بر a ، b و c بخش‌پذیر باشد؟

۱۳. فردی می‌خواهد کنار دیوار باغش، ناحیه‌ای را برای نگهداری از مرغ و خروس‌هایش بسازد. او سه نرده به طول ده متر دارد. با استفاده از دیوار باغ، که مستقیم و طولانی است و این سه نرده، حداکثر مساحتی را که می‌تواند محصور کند چند مترمربع است؟

- ۱۰۰ (۱) $۵۰ + ۲۵\sqrt{۳}$ (۲) $۵۰ + ۵۰\sqrt{۲}$ (۳) $۷۵\sqrt{۳}$ (۴) ۳۰۰ (۵)

۱۴. برای چند مقدار صحیح k ، دستگاه معادلات زیر جوابی غیر از $a = b = c = ۰$ در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = kc(a + b) \\ b^2 + c^2 = ka(b + c) \\ c^2 + a^2 = kb(c + a) \end{cases}$$

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌نهایت (۵)

۱۵. فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n همان اعداد ۱ تا ۲۰ باشند که به ترتیبی دل‌خواه نوشته شده‌اند. عبارت $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n$ چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱۶. زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی دارای این خاصیت است که برای هر دو عضو متمایز آن مثل x

و y ، داریم $(x + y - 1)^2 = xy + 1$. این مجموعه حداکثر چند عضو دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌نهایت (۵)



آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۷. دو عدد طبیعی m و n کم‌تر از ۵۰۰ هستند و $[m, n] = (m - n)^2$. حداکثر مقدار $m + n$ چه قدر است؟ ($[m, n]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک m و n است).

۱۸. سه میله با طول‌های ۱۳۹۶، ۱۴۳۹ و ۲۰۱۸ میلی‌متر روی زمین از یک سر به هم لولا شده‌اند. کم‌ترین مقدار ممکن برای شعاع دایره‌ای که از سه سر دیگر میله‌ها می‌گذرد چند میلی‌متر است؟

۱۹. فرض کنید $x \geq y \geq z$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

حداقل مقدار $\frac{x}{z}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵)

۲۰. در چهارضلعی محدب و محاطی $ABCD$ داریم $\angle B = 110^\circ$. محل برخورد AD و BC را E و محل برخورد AB و CD را F می‌نامیم. اگر عمودهای E بر AB و F بر BC یک‌دیگر را روی دایره محیطی چهارضلعی در نقطه P قطع کنند. اندازه زاویه $\angle PDF$ چند درجه است؟

۲۱. نقطه P درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع یک قرار دارد. قرینه P نسبت به AB را K ، قرینه K نسبت به BC را M و قرینه M نسبت به AC را N می‌نامیم. حداکثر طول NP کدام گزینه است؟

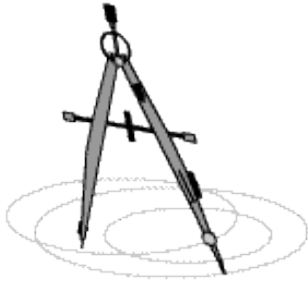
۱ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۳ (۵)

۲۲. هشت عدد کاشی مشابه 1×2 داریم که هر کدام از یک مربع قرمز و یک مربع آبی تشکیل شده است. به چند حالت می‌توان یک ناحیه 4×4 را با این کاشی‌ها پوشاند طوری که هر سطر و هر ستون آن دو مربع قرمز و دو مربع آبی داشته باشد؟



آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

ریاضی کشور



۲۳. پروانه پرگاری خرید و پس از باز کردن بسته آن متوجه شد طول میله سوزن دار ۱۰ سانتی متر و طول میله مدادی ۱۶ سانتی متر است! فرض کنید برای این که بتوان با آن پرگار دایره کشید، باید زاویه مداد با کاغذ دست کم ۳۰ درجه باشد ولی سوزن می تواند هر زاویه ای با صفحه کاغذ داشته باشد. تفاضل شعاع بزرگترین دایره و شعاع کوچکترین دایره ای که می توان با این پرگار کشید بر حسب سانتی متر به کدام گزینه نزدیک تر است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰ (۵)

۲۴. دنباله $\{a_n\}$ با فرمول زیر تعریف می شود:

$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$$\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{4}{a_{96}}$$

- ۱ (۱) $\sqrt{18241} - 1$ ۲ (۲) $\sqrt{18625} - 1$ ۳ (۳) $\sqrt{18625}$ ۴ (۴) $\sqrt{19013} - 1$ ۵ (۵) $\sqrt{19013}$

۲۵. دانشمندان سیاره ای کوچک به شعاع ۳۰ کیلومتر کشف کرده اند که تمام سطح آن را آب فرا گرفته است. شهابی کروی شکل به این سیاره برخورد می کند و کاملاً در آب فرو می رود و ارتفاع آب روی سطح سیاره یک سانتی متر افزایش پیدا می کند. شعاع شهاب چند متر بوده است؟