



نام:  
نام خانوادگی:  
کد ملی:



(۱) در این سؤال منظور از  $(a, b)$ ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  است.

الف) ثابت کنید دنباله  $a_1, a_2, a_3, \dots$  از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر  $i, j \in \mathbb{N}$  که  $i < j$

$$(a_i + j, a_j + i) = 1.$$

ب) گیریم  $p$  عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنباله  $a_1, a_2, a_3, \dots$  از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که هیچ کدام

از عبارات  $(a_i + j, a_j + i)$  (که  $i < j$ ) بر  $p$  بخش پذیر نباشند.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

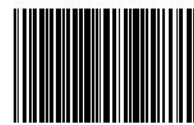
مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:  
نام خانوادگی:  
کد ملی:



۲) نقطه  $P$  داخل دوزنقه متساوی الساقین  $ABCD$ ، که در آن  $AB \parallel CD$ ، طوری انتخاب شده که  $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$  و  $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$ . ثابت کنید  $AB + CD > AD + BC$ .

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:  
نام خانوادگی:  
کد ملی:



۳) جدولی  $n \times n$  داریم که  $n$  بر ۳ بخش پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول  $m \times m$  از آن، که  $m > 1$ ، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:  
نام خانوادگی:  
کد ملی:



۴) گیریم  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که  $x^4 - y^4 = x - y$  ثابت کنید:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y).$$

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

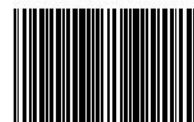
مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:  
نام خانوادگی:  
کد ملی:



۵) پنج کودک باهوش دور میزی دایره‌ای نشسته‌اند. مربی تعدادی سیب را بین آن‌ها تقسیم می‌کند و می‌گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده‌ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این که تعداد سیب‌های خودش را می‌داند، سیب‌های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می‌بیند.» سپس او تعداد کل سیب‌ها را اعلام می‌کند و از هر کس می‌خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه‌رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب‌ها کم‌تر از ۱۶ باشد، دست‌کم یکی از کودکان می‌تواند با استدلال جواب درست را به‌دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب‌ها ۱۶ باشد، مربی می‌تواند سیب‌ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

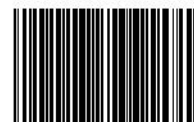
مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:  
نام خانوادگی:  
کد ملی:



۶)  $X$  را نقطه‌ای متغیر روی دایره محیطی مثلث  $ABC$  می‌گیریم. از  $X$  بر  $AB$  و  $AC$  دو عمود رسم می‌کنیم تا خط گذرنده از  $BC$  را به ترتیب در  $P$  و  $Q$  قطع کنند. مرکز دایره گذرنده از  $X$ ،  $P$  و  $Q$  را  $Y$  می‌نامیم. (اگر  $X$ ،  $P$  و  $Q$  بر هم منطبق باشند همان نقطه را  $Y$  می‌گیریم.)

الف. ثابت کنید اگر مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع باشد، با تغییر  $X$  روی دایره محیطی،  $Y$  روی یک دایره حرکت می‌کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر  $X$  روی دایره محیطی،  $Y$  روی یک دایره حرکت کند، مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد