۱۲ جولای ۲۰۰۶

مساله ۱. فرض کنید I مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشد. نقطه P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می کنیم که

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

نشان دهید $AP \geq AI$ و تساوی برقرار می شود اگر و تنها اگر P=I .

مساله ۲. فرض کنید P یک ۲۰۰۶- ضلعی منتظم باشد. قطری از P را **خوب** گوییم هر گاه نقاط انتهایی این قطر، اضلاع P را به دو قسمت تقسیم کند که هرقسمت تعداد فرد ضلع دارد. اضلاع P نیز قطر **خوب** به حساب می‌آیند. فرض کنید P را با ۲۰۰۳ قطر که هیچ دو تای آن ها درون P تقاطع ندارند به ناحیه های مثلث شکل تقسیم کرده ایم. بیشترین تعداد مثلث های متساوی الساقین با دو ضلع خوب را بیابید که می توانند در این ناحیه بندی ظاهر شوند.

مساله ۳. کمترین مقدارعدد حقیقی M را بیابید به طوری که نامساوی

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

برای هر a ، b و c حقیقی برقرار باشد.

زمان: چهار ساعت و نیم

هر مساله هفت امتیاز دارد

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
SLOVENIA 2006

day: **2**

language: **Persian (Farsi)**

۱۳ جولای ۲۰۰۶

مساله ۴. همه زوج های صحیح (x, y) را بیابید که

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

مساله ۵. فرض کنید $P(x)$ يك چند جمله ای از درجه $n>1$ با ضرایب صحیح و k يك عدد صحیح مثبت باشد. چند جمله ای $Q(x)= P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ را در نظر بگیرید که P در آن k بار ظاهر می شود. ثابت کنید حداکثر n عدد صحیح t وجود دارد به طوری که $Q(t)=t$.

مساله ۶. به هر ضلع b از یک چند ضلعی محدب P، بیشترین مساحت مثلثی را نسبت می دهیم که b را به عنوان ضلع دارد و در P قرار گرفته است. نشان دهید مجموع مساحت های نسبت داده شده به اضلاع P، حداقل دو برابر مساحت P است.

زمان: چهار ساعت و نیم
هر مساله هفت امتیاز دارد