50th International Mathematical Olympiad
Bremen | Germany | 2009

Language: **Persian (Farsi)**

Day: **1**

چهارشنبه، ۱۵ جولای ۲۰۰۹

سوال ۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و $a_۱$ ، … ، a_k $(k \geq ۲)$ اعدادی صحیح متمایز از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند که برای $i = ۱, \ldots, k - ۱$، $a_i(a_{i+۱} - ۱)$ بر n بخش‌پذیر است. ثابت کنید که $a_k(a_۱ - ۱)$ بر n بخش‌پذیر نیست.

سوال ۲. فرض کنید ABC یک مثلث با مرکز دایره محیطی O باشد. نقاط P و Q به ترتیب نقاط داخلی اضلاع AC و AB می‌باشند. همچنین فرض کنید K ، L و M به‌ترتیب وسط‌های BP ، CQ و PQ باشند و Γ دایره‌ای باشد که از نقاط K ، L و M می‌گذرد. فرض کنید خط PQ بر دایره Γ مماس باشد. ثابت کنید $OP = OQ$.

سوال ۳. فرض کنید که $s_۱, s_۲, s_۳, \ldots$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری‌که زیر دنباله‌های

$$s_{s_۱}, s_{s_۲}, s_{s_۳}, \ldots \quad \text{و} \quad s_{s_۱+۱}, s_{s_۲+۱}, s_{s_۳+۱}, \ldots$$

هر دو تصاعد حسابی هستند. ثابت کنید که دنبالهٔ $s_۱, s_۲, s_۳, \ldots$ نیز یک تصاعد حسابی است.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر سوال ۷ امتیاز دارد

پنج‌شنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۹

سوال ۴. فرض کنید ABC یک مثلث باشد که $AB = AC$. نیمسازهای $\angle CAB$ و $\angle ABC$ اضلاع BC و CA را به ترتیب در D و E را قطع می‌کنند. فرض کنید K مرکز دایره محاطی مثلث ADC باشد. فرض کنید $\angle BEK = ۴۵^\circ$. تمام مقادیر ممکن برای زاویه $\angle CAB$ را بیابید.

سوال ۵. تمام توابع f از مجموعه اعداد صحیح مثبت به مجموعه اعداد صحیح مثبت را بیابید که برای هر دو عدد صحیح و مثبت a و b، یک مثلث ناتبهگون با اضلاع

$$a,\ f(b),\ f(b+f(a)-۱)$$

وجود داشته باشد. (یک مثلث *ناتبهگون* مثلثی است که رئوس آن هم‌خط نیستند)

سوال ۶. فرض کنید که $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$، a_n اعداد صحیح مثبت و متمایز باشند و M مجموعه‌ای از $n-۱$ عدد صحیح مثبت است که شامل عدد $s = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n$ نیست. یک ملخ قرار است که با شروع از نقطه ۰ در مسیر محور اعداد حقیقی بپرد و n پرش به طول‌های $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$، a_n به سمت راست و با یک ترتیب خاص انجام دهد. ثابت کنید این ترتیب را می‌توان طوری انتخاب کرد که ملخ هیچ‌گاه روی نقطه‌ای از M فرود نیاید.