Language: **Persian (Farsi)**

Day: **1**

سه شنبه ۱۰ جولای ۲۰۱۲

مساله ۱- مثلث ABC داده شده و نقطه ی J مرکز دایره ی محاطی خارجی مقابل به رأس A است. این دایره ی محاطی خارجی بر ضلع BC در M مماس است و بر خطوط AB و AC به ترتیب در K و L مماس است. خطوط LM و BJ در F متقاطعند و خطوط KM و CJ در G متقاطعند. فرض کنید که S نقطه ی اشتراک خطوط AF و BC باشد و T نقطه ی اشتراک خطوط AG و BC باشد.

ثابت کنید M نقطه ی وسط ST است.

(دایره ی محاطی خارجی مقابل به رأس A دایره ای است که مماس بر پاره خط BC و مماس بر نیم خط AB جلوتر از B و مماس بر نیم خط AC جلوتر از C است.)

مساله ۲- فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح باشد و فرض کنید a_2 و a_3 و...و a_n اعداد مثبت حقیقی باشند به طوری که $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. ثابت کنید:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n$$

مساله ۳- بازی *حدس زدن انتخاب دروغگو* با دو بازیکن A و B بازی می شود. قواعد بازی بستگی به دو عدد صحیح k و n دارند که هر دو بازیکن می دانند.

در آغاز بازی A اعداد صحیح x و N را انتخاب می کند که در آن $1 \leq x \leq N$. بازیکن A عدد x را پیش خود نگه می دارد و صادقانه عدد N را به بازیکن B می گوید. حال بازیکن B سعی می کند با پرسیدن سوالاتی از بازیکن A به روش زیر اطلاعاتی از x به دست بیاورد: هر سوال B تشکیل شده است از مشخص کردن مجموعه ی دلخواه S از اعداد صحیح مثبت و پرسیدن از A که آیا x متعلق به S است. بازیکن B می تواند هر چند سوال که بخواهد به شکل بالا بپرسد و نیز می تواند یک سوال را بیش از یک بار هر وقت بخواهد بپرسد. بازیکن A باید بی درنگ به هر سوال بازیکن B پاسخ مثبت یا منفی دهد. اما می تواند هرچند بار که خواست دروغ بگوید. تنها محدودیت این است که بین هر $k+1$ جواب پشت سر هم حداقل یک جواب راست باشد.

بعد از این که B هرچند بار که خواست سوال پرسید، باید مجموعه ای X از حداکثر n عدد صحیح مثبت را معرفی کند. اگر x متعلق به X باشد، B برنده است و در غیر این صورت بازنده است. ثابت کنید:

۱-اگر $n \geq 2^k$ آنگاه B استراتژی برد دارد.

۲-برای هر k به اندازه کافی بزرگ، عدد صحیح $n \geq 1{,}99^k$ وجود دارد که B استراتژی برد ندارد.

زمان ٤ ساعت و ۳۰دقیقه
ارزش هر سوال ۷ امتیاز است

Language: Persian (Farsi)

Language: **Persian (Farsi)**

Day: 2

53rd International Mathematical Olympiad

MAR DEL PLATA - ARGENTINA

چهارشنبه ۱۱ جولای ۲۰۱۲

مساله ۴- تمام توابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را پیدا کنید که برای هر اعداد صحیح a، b، c که در $a+b+c=0$ صدق می کنند تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(a)^{۲} + f(b)^{۲} + f(c)^{۲} = ۲\, f(a)\, f(b) + ۲ f(b)\, f(c) + ۲ f(c) f(a)$$

(در اینجا $\mathbb{Z}$ نماینده ی مجموعه ی اعداد صحیح است.)

مساله ۵- فرض کنید ABC مثلثی با $\angle BCA = ۹۰°$ باشد و فرض کنید D پای ارتفاع رسم شده از C باشد. فرض کنید X نقطه ای درون پاره خط CD است. فرض کنید K نقطه ای روی پاره خط AX باشد به طوری که BK=BC . مشابها فرض کنید L نقطه ای روی پاره خط BX باشد به طوری که AL=AC . فرض کنید M نقطه ی اشتراک AL و BK باشد.

نشان دهید MK=ML .

مساله ۶- تمام اعداد صحیح مثبت n را پیدا کنید که اعداد صحیح نامنفی $a_۱$ و $a_۲$ و...وa_n وجود داشته باشند که

$$\frac{۱}{۲^{a_۱}}+\frac{۱}{۲^{a_۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{a_n}}=\frac{۱}{۳^{a_۱}}+\frac{۲}{۳^{a_۲}}+\cdots+\frac{n}{۳^{a_n}}=۱$$

زمان ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
ارزش هر سوال ۷ امتیاز است