



به نام او

آزمون جبر

زمان آزمون: ۴ ساعت

۱. همه توابع $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که برای هر $x, y \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

۲. اعداد $a, b, c > 0$ با شرط $ab + bc + ca = 1$ مفروضند. ثابت کنید

$$abc(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1})(c + \sqrt{c^2 + 1}) \leq 1$$

۳. برای چندجمله‌ای‌های غیر ثابت $p, q, f \in \mathbb{R}[x]$ می‌دانیم چندجمله‌ای f از درجه ۲ است،

$$p(f(x)) = f(p(x)) \quad \text{و} \quad q(f(x)) = f(q(x)).$$

ثابت کنید $p(q(x)) = q(p(x))$

موفق باشید.