

به نام او



آزمون نظریه اعداد

زمان آزمون: ۴ ساعت

۱. فرض کنید $P(x) = x^3 + 14x^2 - 2x + 1$ یک چندجمله‌ای درجه ۳ است. نشان دهید n طبیعی وجود دارد که برای هر x صحیح داشته باشیم $x - \underbrace{P(P(\dots P(x)))}_{n \text{ بار}} \equiv 101 \pmod{101}$

۲. برای هر n طبیعی $\mathcal{F}(n)$ را مجموعه همه اعداد طبیعی m تعریف می‌کنیم که چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + mx + n$ ریشه صحیح داشته باشد. فرض کنید S مجموعه همه اعداد طبیعی n باشد که $\mathcal{F}(n)$ شامل دو عدد متوالی است. ثابت کنید مجموعه S نامتناهی است و

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} \leq 1$$

۳. فرض کنید p و $4p + 1$ هر دو عددی اول هستند، ثابت کنید $\frac{1}{4p+1}$ در بسط اعشاری خود تمام ارقام صفر تا ۹ را دارد.

موفق باشید.