

به نام او



## آزمون ترکیبیات

زمان آزمون: ۴ ساعت

۱. از یک جدول  $n \times n$ ،  $k$  خانه را علامت زده ایم به طوری که برای هر  $m > \frac{n}{k}$  هر دو قطر هر زیر جدول  $m \times m$  شامل خانه‌ای علامت زده شده، است. حداقل مقدار  $k$  را بیابید.

۲. فرض کنید  $k, n \geq 1$  اعداد طبیعی و نسبت به هم اول هستند. همه اعداد طبیعی که از  $k+n$  بیش تر نیستند را با ترتیبی دلخواه روی تخته نوشته ایم. دو عدد که اختلافشان برابر با  $k$  یا  $n$  است را می‌توانیم با هم جابجا کنیم. ثابت کنید با این جابجایی‌ها می‌توانیم به ترتیب  $1, k+n-1, k+n, \dots, k+n-1, k+n$  برسیم.

۳. ۲۰۱۸ بازیکن دور یک دایره نشسته‌اند. در ابتدا  $k$  کارت را به دلخواه بین آن‌ها تقسیم می‌کنیم (ممکن است بازیکنی وجود داشته باشد که کارتی نداشته باشد). در هر مرحله یک بازیکن مانند  $A$  که دو نفر مجاور او حداقل یک کارت دارند را انتخاب می‌کنیم و از هر کدام از این دو نفر یک کارت می‌گیریم و به بازیکن  $A$  می‌دهیم. بازی وقتی تمام می‌شود که دیگر چنین بازیکنی وجود نداشته باشد. بزرگ‌ترین مقدار  $k$  را بیابید که بدون در نظر گرفتن نحوه پخش شدن کارت‌ها و انتخاب بازیکن‌ها در هر مرحله، همواره بازی پس از متناهی مرحله به پایان برسد.

موفق باشید.